**Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики**

Е.В. Хорошилова

КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

ПО КУРСУ "ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ"

Для студентов 2 курса

Факультета мировой политики МГУ

Москва–2017

Положение дисциплины в структуре учебных курсов.

Высшая математика изучается на Факультете мировой политики (ФМП) в течение I семестра 2 курса. На 1 курсе математические дисциплины как отдельный предмет не изучаются. Курс «Основы высшей математики» призван сформировать у студентов компетенцию в области высшей математики, способствовать дальнейшему развитию математического мышления как одного из важнейших элементов высшего образования, а также подготовить студентов к восприятию и анализу базовых элементов математического моделирования социально-экономических процессов.

Программа курса «Основы высшей математики» рассчитана на одну лекцию в 2 недели и одно семинарское занятие в неделю, что составляет около 7-8 лекций и 13-14 занятий в семестр, а также зачётную работу.

Основными темами курса являются:

1. Теория чисел и теория множеств. Последовательности действительных чисел.
2. Функции одного действительного переменного: монотонность, ограниченность, предел и непрерывность.
3. Функции одного действительного переменного: дифференцируемость, экстремумы; исследование функций при помощи производной.
4. Первообразная и неопределенный интеграл. Определенный интеграл и его приложения.
5. Функции нескольких переменных. Теория дифференциальных уравнений.
6. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.
7. Кратные интегралы и ряды.
8. Элементы векторного анализа. Математические модели в общественных науках.

Основной список рекомендованной литературы:

Учебники:

[1]. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающимся по экономическим специальностям /Н.Ш. Кремер и др. Под ред. Н.Ш. Кремера. 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 479с.

[2]. Шипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов. – 7 изд. стер. – М.: Высш. шк. – 2005. – 479 с.

[3]. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. Учебник. – М.: ООО «ТК Велби», 2002. – 592 с.

Задачники:

[4]. Практикум по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие для вузов /Кремер Н.Ш., Тришин И.М., Путко Б.А. и др. /Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 423 с.

[5] Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб. пособ. для студентов высш. учеб. завед. – 3-е изд. – М.: Высш. шк., 2003. – 304 с.

Дополнительный список литературы:

[6]. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Гуманитариям о математике. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели: Учебник. Изд. 4-е, доп. М.: ЛЕНАНД, 2015. – 292с.

[7]. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. Учеб. пособие. – 3-е изд. – М.: Дело, 2004. – 440с. (Сер. «Классический университетский учебник»)

[8]. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. – 6-е изд., испр. и доп. /Под. общ. ред. С.С. Герштейна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 520с.

[9]. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М.: МЦНМО, 2000. – 32с.

[10]. Босс В. Интуиция и математика. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Изд-во ЛКИ. – 2008. – 216с.

[11]. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов: Учебное пособие для высших учебных заведений. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Логос, 2001. – 296с.

[12]. Земляков А.Н. Математический анализ реальности. Дифференциальные уравнения для школьников. – М.: МЦНМО, 2013. – 360с.

[13]. Шумов В.В. Модели пограничного сдерживания. – М.: ЛЕНАНД, 2012. – 200с.

[14]. Акимов В.П. Математика для политологов: учеб. пособие. Моск. гос. ин-т междунар. отношений (университет) МИД России. Каф. математ. методов и информационных технологий. – 2-е изд. доп. – М.: МГИМО–Университет, 2011–210с.

[15]. Клима Р.Э., Ходж Дж.К. Математика выборов. – М.: МЦНМО, 2007. – 224с.

Другие источники:

Видеолекции:

[17] Школа В. Опойцева (псевдоним Босс, автор цикла небольших по объему книг по многим разделам математики):

https://oschool.ru/lecture/Ek0SFP7fg

[18] Российский математик, педагог, популяризатор математических знаний, д.ф.-м.н. Алексей Савватеев:

1) 4 лекции "Математика для гуманитариев (18 декабря 2014 года)":

2) 5 лекций "Математика для гуманитариев (22 июля 2014 года)":

3) Алгебра для всех:
https://www.youtube.com/playlist?list=PLgEpoT7yAl9VXtZa0ZiWdbp0oqOw1AteC

Данные лекции представляют собой лишь краткий (обзорный) конспект. За более подробным материалом рекомендуется обращаться к классическим учебникам по высшей математике.

Содержание

1 ЛЕКЦИЯ: Элементы теории чисел и теории множеств. Последовательности действительных чисел 3

1.1 Действительные числа 4
1.2 Множества действительных чисел 10
1.3 Последовательности действительных чисел 16

2 ЛЕКЦИЯ: Функции одной действительной переменной: ограниченность, монотонность, экстремумы, предел и непрерывность 25

2.1 Функции одной переменной: определение, ограниченность, монотонность, выпуклость. Явный, неявный и параметрический способы задания 26
2.2 Предел функции одной переменной 39
2.3 Непрерывность функции одной переменной 48

3 ЛЕКЦИЯ: Функции одного действительного переменного: дифференцируемость. Исследование функций при помощи производной 53

3.1 Понятие производной 54
3.2 Дифференцируемость в точке и на множестве. Дифференциал 58
3.3 10 основных теорем о дифференцируемых функциях 65
3.4 Общая схема исследования функции и построения графика 69

4 ЛЕКЦИЯ: Первообразная и неопределённый интеграл. Определённый интеграл 73

4.1 Первообразная и неопределённый интеграл 74
4.2 Определённый интеграл 84
4.3 Приложения определённого интеграла 91
4.3.1 Вычисление площади плоской фигуры 91
4.3.2 Вычисление длины дуги кривой 93
4.3.3 Вычисление объёмов тел, в том числе тел вращения 96
4.3.4 Вычисление площади поверхности тела вращения 98
4.3.5 Несобственные интегралы 101

5 ЛЕКЦИЯ: Функции многих переменных. Дифференциальные уравнения 106

5.1 Понятие m-мерного координатного пространства. Последовательность точек и её предел 107
5.2 Понятие функции нескольких переменных 109
5.2.1 Предел функции нескольких переменных 111
5.2.2 Непрерывность функции нескольких переменных 114
5.2.3 Дифференцируемость функции нескольких переменных 119
5.2.4 Локальный (безусловный) экстремум функции нескольких переменных 130
5.3 Дифференциальные уравнения 133
5.3.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка . . 134
5.3.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка . . 139

6 ЛЕКЦИЯ: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия 142
6.1 Матрицы, определители и их свойства . . . 143
6.1.1 Операции над матрицами . . . 145
6.1.2 Определители квадратных матриц и их свойства . . . 148
6.1.3 Обратная матрица и её свойства . . . 151
6.2 Системы линейных уравнений . . . 152
6.2.1 Системы двух уравнений с двумя переменными . . . 153
6.2.2 Системы трёх уравнений с тремя переменными . . . 159
6.3 Линии и поверхности на плоскости и в пространстве . . . 161
6.3.1 Аналитическая геометрия на плоскости . . . 161
6.3.2 Аналитическая геометрия в пространстве . . . 171

7 ЛЕКЦИЯ: Кратные и криволинейные интегралы. Ряды 180
7.1 Интегралы функций нескольких переменных . . . 181
7.1.1 Двойные интегралы . . . 181
7.1.2 Криволинейные интегралы на плоскости . . . 192
7.2 Ряды . . . 196
7.2.1 Числовые ряды . . . 196
7.2.2 Функциональные последовательности и ряды . . . 204

8 ЛЕКЦИЯ: Векторная алгебра. Математическое моделирование в гуманитарных дисциплинах 208
8.1 Векторная алгебра . . . 209
8.1.1 Понятие вектора. Линейные операции над векторами. . . . 209
8.1.2 Координаты вектора . . . 211
8.1.3 Векторные функции . . . 212
8.1.4 Скалярное произведение векторов. Понятие евклидова пространства. . . . 213
8.1.5 Линейная зависимость и независимость системы векторов. Разложение по базису. . . . 216
8.1.6 Векторное произведение . . . 219
8.1.7 Смешанное произведение . . . 220
8.2 Математическое моделирование в гуманитарных дисциплинах . . . 222
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . 223

1 ЛЕКЦИЯ: Элементы теории чисел и теории множеств. Последовательности действительных чисел

«Главная цель расчётов – не цифры, а понимание».
Ричард Хемминг, американский математик,
основоположник теории кодирования.

Краткое содержание.

I. Действительное число. Классификация действительных чисел (натуральные, целые, рациональные, иррациональные числа). Модуль действительного числа и его свойства. Сравнение действительных чисел (упорядоченность). Арифметические операции над действительными числами. Приближение действительных чисел рациональными. Геометрический смысл действительного числа.

II. Множество, подмножества. Множество действительных чисел. Числовая прямая, интервал, полуинтервал, сегмент, полупрямая, δ-окрестность точки. Пустое множество. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, дополнение). Понятие взаимно однозначного соответствия и эквивалентных множеств (множества N и Q эквивалентны). Ограниченные и неограниченные множества. Точные грани. Предельная точка множества. Замкнутые и открытые множества. Мощность множества. Счётные и несчётные множества, множества мощности континуум.

III. Числовая последовательность. Ограниченные (снизу, сверху, с двух сторон) и неограниченные последовательности. Предел последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Единственность предела у сходящейся последовательности. Арифметические операции над сходящимися последовательностями. Предельный переход в неравенствах. Принцип двусторонней ограниченности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их основные свойства. Монотонные последовательности. Сходимость монотонной ограниченной последовательности. 2-й замечательный предел. Число е. Подпоследовательность. Предельные точки.

1.1 Действительные числа

«Всё сущее есть число». Пифагор Самосский

Понятие действительного числа лежит в основе всей математики.

Основы современной теории действительных чисел были заложены во второй половине XIX века в работах К. Вейерштра́сса, Р. Дедеки́нда, Г. Ка́нтора, Э. Ге́йне, Ш. Мерэ. Так, в 1872 году были опубликованы одновременно две работы: теория фундаментальных последовательностей Ка́нтора (действительное число рассматривается как предел последовательности рациональных чисел), теория бесконечных десятичных дробей Вейерштра́сса (действительное число рассматривается как число, представимое в виде бесконечной десятичной дроби). Остановимся подробнее на теории, предложенной Вейерштрассом и получившей в настоящее время широкое распространение.

Натуральные, целые, рациональные, иррациональные и действительные числа. Из курса элементарной математики известно, что *натуральными* называются числа $1, 2, 3, \ldots$. Их бесконечно много. Множество всех натуральных чисел обозначается латинской буквой $\mathbb{N}$ (от лат. *naturalis* – естественный). Если нужно записать, что некоторое число n является натуральным, то используют квантор (знак) принадлежности $\in$ и пишут: $n \in \mathbb{N}$.

Если ко множеству натуральных чисел добавить число 0 (нуль), а также числа $-1, -2, -3, \ldots$, противоположные по знаку натуральным числам, то полученное бесконечное множество называют множеством *целых* чисел и обозначают $\mathbb{Z}$. В международной математической литературе для обозначения множества натуральных (целых положительных) чисел используют также запись $\mathbb{Z}_+$. Для множества целых неотрицательных чисел можно встретить обозначения $\mathbb{Z}_0$, $\mathbb{N}_0$ или $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

«Я не согласен с математикой. Считаю, что сумма нулей – грозная цифра».

Станислав Ежи Лец (1909–1966) – польский поэт,
философ, писатель-сатирик и афорист XX века.

Рациональным называется число, представимое в виде обыкновенной дроби $\dfrac{p}{q}$, где p – целое число, а q – натуральное. Например, $0 = \dfrac{0}{1}$, $-5 = \dfrac{-5}{1}$, $-\dfrac{2}{3}$ – рациональные числа. Множество рациональных чисел обозначается буквой $\mathbb{Q}$.

Делением числителя p на знаменатель q обыкновенную дробь всегда можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби[1], например, $\frac{1}{3} = 0,(3)$. Верно и обратное: любую бесконечную десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.

Поэтому *рациональное число* можно определить иначе, а именно как число, представимое в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Например, $1,2(3)$, $-0,01(20)$ – рациональные числа. Любое целое число, согласно этому определению, является рациональным числом, так как его можно записать в виде периодической дроби с нулевым периодом: $3 = 3,(0)$.

Помимо рациональных чисел, представимых в виде бесконечных десятичных периодических дробей, существуют числа, представимые бесконечными десятичными непериодическими дробями. Их называют *иррациональными*. Примеры иррациональных чисел: $0,1234567...$, π, e, $\sqrt{2}$, $\sin 1^\circ$, $\log_2 5$, где $\pi = 3,14159265358979323846...$, $e = 2,71828182845904523536...$.

Приведём теперь определение действительного (или вещественного) числа. *Действительным* называется число, представимое в виде бесконечной десятичной дроби $\pm a_0, a_1 a_2 ... a_n ...$, где символы $+$ или $-$ называются *знаком числа*, a_0 – целое неотрицательное число, $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ – последовательность десятичных цифр, принимающих значения $0; 1; \ldots; 9$. Число называется *положительным*, если ему приписан знак плюс $(+)$, и *отрицательным*, если минус $(-)$. Например, $-5,000...$, $0,000...$, $0,12345...$, $12,4010101...$ – действительные числа. В этом определении не уточняется – периодической или непериодической является бесконечная периодическая дробь, она может быть и той, и другой.

Если объединить множество рациональных чисел и множество иррациональных чисел, то полученное множество будет *множеством действительных чисел*, которое обозначают $\mathbb{R}$ (от лат. *realis* – действительный). Запись $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ означает, что x – иррациональное число. Существуют комплексные числа, которые обобщают понятие действительного числа. В данном курсе мы будем рассматривать, в основном, действительные числа.

[1] Если после десятичной запятой, начиная с некоторого разряда, цифры начинают повторяться, то повторяющуюся группу цифр называют *периодом*, а саму десятичную дробь – *периодической*. Период принято записывать в скобках, например $3,0121212... = 3,0(12)$.

Таким образом, все действительные числа подразделяются на рациональные и иррациональные. При этом сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел являются рациональными числами. Сумма (разность) рационального и иррационального чисел есть иррациональное число. Произведение рационального и иррационального чисел всегда иррационально, кроме случая, когда рациональное число 0 умножается на иррациональное число (тогда в результате получается нуль – рациональное число).

Правила перевода. Поскольку любое рациональное число можно представить в двух эквивалентных формах (как обыкновенную дробь и как десятичную периодическу дробь), то существуют *правила перевода* рационального числа из вида обыкновенной дроби к виду десятичной дроби и наоборот. Так, в курсе элементарной математики доказывается правило перевода рационального числа, записанного периодической дробью $x = a_0, a_1 a_2 ... a_k (a_{k+1} ... a_{k+m})$, к виду обыкновенной дроби:

$$x = \frac{\overline{a_0 a_1 ... a_{k+m}} - \overline{a_0 a_1 ... a_k}}{\underbrace{99...9}_{m}\underbrace{00...0}_{k}},$$

например:

$$5,01(307) = \frac{501307 - 501}{99900} = \frac{500806}{99900}, \quad 0,1(4600) = \frac{14600 - 1}{99990}, \quad 2,(19) = \frac{219 - 2}{99}.$$

Существуют и другие способы перевода. Например, обозначим переводимую десятичную дробь через x: $x = 5,01(307)$, умножим это равенство на сто: $100x = 501,(307)$. Затем умножим полученное равенство на тысячу: $100000x = 501307,(307)$ и вычтем из второго равенства первое, при этом одинаковые периоды сократятся: $99900x = 500806$. Осталось разделить обе части полученного равенства на 99900, и приходим к тому же результату, что и выше.

Следует иметь в виду, что для периодических десятичных дробей с нулевым периодом существует эквивалентная форма записи с периодом, состоящем из девяток. Например, $4,1(9) = 4,2(0)$ или $1,(9) = 2,(0)$, что несложно доказать, используя приведённое выше правило перевода.

Модуль действительного числа. Пусть x – произвольное действительное число. Тогда его *модуль* (абсолютная величина) определяется следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Например, $|3| = 3$, $|-5| = 5$.

Приведём основные *свойства модуля.* При всех $x, y \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения:

1. $|x| = |-x|$; **2**. $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$ $(n \in \mathbb{N})$, но $\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x$;

3. $|x|^2 = x^2$; **4**. $|xy| = |x||y|$;

5. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$; **6**. $|x| = \max(x; -x)$; **7**. $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$,

где $\max(a, b)$ означает наибольшее из чисел a и b, а функция «сигнум» (знак числа), относящаяся к неэлементарным, определяется так:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

8. $|x| \geq x$, причём $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$;
$|x| \geq -x$, причём $|x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0$.

9. $|x - y| \geq ||x| - |y||$, причём $|x - y| = ||x| - |y|| \Leftrightarrow xy \geq 0$.

Для доказательства возведём неравенство в квадрат:

$$\begin{aligned}(x-y)^2 \geq (|x|-|y|)^2 \ &\Leftrightarrow \ x^2 - 2xy + y^2 \geq x^2 - 2|x||y| + y^2 \\ &\Leftrightarrow \ |xy| \geq xy,\end{aligned}$$

что верно при всех $x, y \in \mathbb{R}$. При этом все эти неравенства одновременно обращаются в равенство при $xy \geq 0$. $\square$

10. *Неравенство о сумме взаимно обратных чисел.* Для любого $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (т.е. $a \neq 0$) имеет место неравенство: $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geq 2$, которое обращается в равенство только при $|a| = 1$. В частности, при любом положительном a выполняется $a + \frac{1}{a} \geq 2$, которое обращается в равенство только при $a = 1$.

11. *Неравенство треугольника.* Для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \text{ причём } |x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

12. *Неравенство многоугольника*, или обобщённое неравенство треугольника. Для любых действительных x_i, $i = \overline{1, n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$, модуль суммы этих чисел не превышает суммы их модулей:

$$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|, \quad \text{или} \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

причём неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда все x_i имеют один знак (все неотрицательны или, наоборот, все неположительны).

Сравнение действительных чисел. Множество действительных чисел *упорядочено*, т.е. между любыми двумя числами можно поставить один и только один из знаков $=$, $<$, $>$. Сравнение действительных чисел в форме бесконечных десятичных дробей производится поразрядно.[1] Например, пусть даны два неотрицательных числа $a = +a_0, a_1a_2...a_n...$ и $b = +b_0, b_1b_2...b_n....$ Если $a_0 < b_0$, то $a < b$; если $a_0 > b_0$, то $a > b$. В случае равенства $a_0 = b_0$ переходят к сравнению следующего разряда, и так далее. Если равенства $a_k = b_k$ выполняются сразу для всех $k = 0, 1, 2, ...$, то числа a и b считаются равными. Если после конечного числа шагов встретится первый разряд n такой, что $a_n \neq b_n$, то $a \neq b$. Если при этом $a_n < b_n$, то $a < b$, а если $a_n > b_n$, то $a > b$.

Всякое отрицательное число по определению меньше нуля, а нуль меньше любого положительного числа. Для двух отрицательных чисел a и b меньшим считается то, у которого больше модуль.

Арифметические операции над действительными числами. *Суммой* двух действительных чисел a и b называется действительное число, обозначаемое $a + b$, такое, что для любых рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих неравенствам $\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq b \leq \beta_2$, выполняются неравенства $\alpha_1 + \beta_1 \leq a + b \leq \alpha_2 + \beta_2$. *Разностью* действительных чисел a и b называется действительное число, обозначаемое $a - b$, такое, что сумма b и $a - b$ равна a.

Произведением двух положительных действительных чисел a и b называется действительное число, обозначаемое $a \cdot b$, такое, что для любых неотрицательных рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих неравенствам $\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq b \leq \beta_2$, выполняются неравенства $\alpha_1 \cdot \beta_1 \leq a \cdot b \leq \alpha_2 \cdot \beta_2$. Если хотя бы одно из чисел a и b равно нулю, то полагают $a \cdot b = 0$. Если числа a и b одного знака, то полагают $a \cdot b = |a| \cdot |b|$. Наконец, если числа a и b разных знаков, то по определению считают, что $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$.

[1] Напомним, что существуют две эквивалентные формы записи чисел с нулевым периодом: $a_0, a_1a_2 \ldots a_n(9) = a_0, a_1a_2 \ldots a_n + 10^{-n}$, например, $4,(9) = 5,(0)$. Поэтому, если запись одного из сравниваемых чисел, начиная с некоторого разряда, представляет собой периодическую десятичную дробь, у которой в периоде стоит 9, то ее предварительно будем заменять на эквивалентную запись с нулем в периоде.

Пусть $b \neq 0$. Назовём число b^{-1} *обратным* к числу b, если $b \cdot b^{-1} = 1$. Тогда операцию *деления* a на b можно определить как произведение a и b^{-1}.

В курсе математического анализа доказываются теоремы существования и единственности суммы, разности, произведения и частного любых двух действительных чисел.

Приближение действительного числа рациональными числами. Рассмотрим важнейшие свойства действительных чисел. Образно говоря, на числовой прямой рациональные числа располагаются «вперемешку» с иррациональными, причём множество иррациональных чисел в известном смысле «плотнее» множества рациональных. Возникает закономерный вопрос, насколько часто на числовой прямой попадаются рациональные и иррациональные числа, и можно ли одни числа приблизить другими. Ответ на этот вопрос дают три леммы.

Лемма 1. Для любого действительного числа a и произвольного положительного рационального числа ε найдётся пара рациональных чисел q_1 и q_2, отстоящих друг от друга менее, чем на ε и таких, что a лежит между этими рациональными числами:[1]

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q}:\ (q_1 \leq a \leq q_2) \wedge (q_2 - q_1 < \varepsilon).$$

Эта лемма говорит о том, что любое действительное число можно с заданной точностью с двух сторон приблизить рациональными числами.

Лемма 2. Между любыми двумя различными действительными числами содержится рациональное число:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}:\ a \neq b\ \exists q \in \mathbb{Q}:\ a < q < b.$$

Аналогично можно утверждать, что между любыми двумя различными действительными числами содержится иррациональное число. Отсюда следует, что между двумя неравными действительными числами находится бесконечно много как рациональных, так и иррациональных чисел.

Лемма 3. Пусть a и b – заданные действительные числа. Приближение действительного числа рациональными, описанное в лемме 1,

[1]Здесь квантор всеобщности $\forall$ заменяет слова «любой, для любого», квантор существования $\exists$ заменяет слова «существует, найдётся»; квантор $\wedge$ означает логическое «и».

определяет действительное число единственным образом:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+ \ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : (q_1 \leq a \leq q_2) \wedge (q_1 \leq b \leq q_2) \wedge (q_2 - q_1 < \varepsilon)) \Rightarrow a = b$$

Все три леммы активно используются для доказательства различных теорем, связанных с операциями сложения и умножения действительных чисел.

Геометрический смысл действительного числа. Наглядно понятие действительного числа можно представить себе при помощи *числовой прямой*. Если на прямой выбрать направление, начальную точку отсчёта и единицу длины для измерения отрезков, то каждому действительному числу можно поставить в соответствие определённую точку на этой прямой, и обратно, каждая точка будет представлять некоторое, и притом только одно, вещественное число. Вследствие этого соответствия термин «числовая прямая» обычно употребляется в качестве синонима множества действительных чисел.

Заглядывая вперёд, можно сказать, что если натуральные числа возникли в процессе обыкновенного счёта, рациональные – из потребности оперировать частями целого, то действительные числа предназначены для измерения непрерывных величин.

1.2 Множества действительных чисел

«Заговори, чтобы я тебя увидел».

Сократ (470 г. до н. э. – 399 г. до н. э.) – древнегреческий философ.

Понятие числового множества. *Множество* – одно из ключевых понятий математики, в частности, теории множеств и логики.[1] Множество – это набор, совокупность, собрание каких-либо объектов, называемых его элементами, обладающих общим для всех характеристическим свойством. Понятие множества принимается за основное (аксиоматическое), т.е. не сводимое к другим понятиям. Если элементами множества являются числа, то множество называют *числовым*.

Отношения между множествами. Основное отношение между элементом a и содержащим его множеством A – это принадлежность

[1] "Под *множеством* мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли" (Георг Кантор). "*Множество* есть совокупность различных элементов, мыслимая как единое целое" (Бертран Расселл).

элемента множеству, обозначается: $a \in A$ (a принадлежит A, или A содержит a). Если a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$ (a не принадлежит A, A не содержит a).

Два множества действительных чисел A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. если каждый элемент множества A принадлежит B и, обратно, каждый элемент B принадлежит A. Тогда пишут $A = B$. Таким образом, множество однозначно определяется его элементами и не зависит от порядка записи этих элементов. Например, множество из трёх элементов a, b, c допускает шесть видов записи: $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$. Из соображений формального удобства вводят *пустое множество*, не содержащее ни одного элемента. Его обозначают $\emptyset$.

Если каждый элемент множества A входит во множество B, то A называется *подмножеством* B. Пишут $A \subseteq B$, $B \supseteq A$ (A входит в B, или A содержится в B, B содержит A). Очевидно, что если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$. Пустое множество по определению считается подмножеством любого множества.

Если каждый элемент множества A входит в B, но множество B содержит хотя бы один элемент, не входящий в A, т.е. если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется собственным (строгим) подмножеством B. В этом случае пишут $A \subset B$, $B \supset A$ ($\subset, \supset$ – знаки сторогого включения). Например, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Основные операции над множествами.

Пересечение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ – это множество, содержащее в себе те и только те элементы, которые принадлежат одновременно и множеству A, и множеству B.

Объединение: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ – это множество, содержащее в себе те и только те элементы, которые принадлежат хотя бы одному из исходных множеств. Если множества A и B не пересекаются: $A \cap B = \varnothing$, то их объединение обозначают также $A + B = A \cup B$.

Разность: $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ – это множество, состоящее из тех элементов A, которые не входят в B.

Дополнение. Пусть $A \subset B$. Множество $\overline{A}$, определяемое из соотношения $\overline{A} = B \setminus A$, называют *дополнением* множества A (до множества B). Иными словами, дополнение множества A до множества B – это множество, содержащее все элементы множества B, не принадлежащие множеству A.

Декартово (прямое), произведение: $A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Мощность множества. Счётные и несчётные множества. Мощность множества – это обобщение понятия количества элементов множества, которое имеет смысл для всех множеств, включая бесконечные. Мощность множества A будем обозначать через $|A|$.

Для того чтобы ввести понятие мощности множества, нам понадобится понятие взаимно однозначного отношения между элементами двух числовых множеств. *Взаимно однозначным соответствием* между множествами A и B называется соответствие, обладающее следующими тремя свойствами: 1) каждому элементу множества A соответствует один и только один элемент множества B; 2) двум различным элементам множества A соответствуют два различных элемента множества B; 3) всякий элемент множества B соответствует хотя бы одному элементу множества A.

Если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), то такие множества называются *равномощными* (или эквивалентными). С точки зрения теории множеств, равномощные множества неразличимы.

Докажем, например, что множество чётных целых чисел $\mathbb{E}$ имеет такую же мощность, что и множество целых чисел $\mathbb{Z}$. Определим функцию $f : \mathbb{E} \to \mathbb{Z}$ так: $f(x) = \dfrac{x}{2}$. Эта функция устанавливает взаимно однозначное отображение между множествами $\mathbb{E}$ и $\mathbb{Z}$, поэтому $|\mathbb{E}| = |\mathbb{Z}|$.

Мощность множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ обозначается символом $\aleph_0$ ("алеф-нуль"). Множество называется *бесконечным*, если его мощность $\geq \aleph_0$. *Счётным* называется множество, эквивалентное множеству натуральных чисел. Это множество, элементы которого можно занумеровать натуральными числами. Как доказал Г. Кантор, множество всех рациональных чисел – счётно, однако множество всех действительных чисел – несчётно. Таким образом, счётные множества – это «самые маленькие» из бесконечных множеств.

Про множества, равномощные множеству всех действительных чисел, говорят, что они имеют *мощность континуум* (от лат. continuum – непрерывное), и мощность таких множеств обозначается символом c. Например, отрезок $[a, b]$ и интервал (a, b) континуальны.

Перечислим *основные свойства*, связанные с мощностью множеств.

1. Два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они состоят из одинакового числа элементов. То есть для конечного множества понятие мощности множества совпадает с привычным понятием количества элементов множества.

2. Любое подмножество счётного множества конечно или счётно.

3. Объединение конечного или счётного числа счётных множеств счётно.

4. Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

5. Для бесконечных множеств, в отличие от конечных, мощность множества может совпадать с мощностью своего собственного подмножества, например $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$. Более того, множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно содержит равномощное собственное (т.е. не совпадающее с основным множеством) подмножество.

6. Удаление или добавление конечного числа элементов не меняет мощности бесконечного множества.

7. *Теорема Кантора*[1] гарантирует существование более мощного множества для любого данного: «Множество всех подмножеств множества A (включая пустое подмножество и само множество) мощнее A.

8. Множество всех конечных подмножеств счётного множества счётно.

9. Множество всех подмножеств счётного множества континуально.

10. Мощность декартова произведения: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. В частности, прямое произведение конечного числа счётных множеств счётно.

11. Декартово произведение бесконечного множества A с самим собой равномощно A.

12. Формула включения-исключения для мощностей пересекающихся множеств в простейшем виде: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Ограниченные и неограниченные множества. Непустое множество действительных чисел X называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует действительное число M (соответственно, m) такое, что для любых $x \in X$ справедливо $x \le M$ ($x \ge m$). Число M называется при этом *верхней (нижней) гранью* множества X.

Заметим, что если множество имеет хотя бы одну верхнюю (нижнюю) грань, то оно имеет сразу бесконечно много верхних (нижних) граней, поскольку любое число, большее верхней грани (меньшее нижней грани) также является верхней (нижней) гранью множества X.

Например, множество значений функции $y = x^2$ ограничено снизу, так как $\forall x \in \mathbb{R}$ имеем $x^2 \ge 0$ (в качестве нижней грани выступило $m = 0$), но при этом область определения этой функции – неограниченное множество: $D(y) = \mathbb{R}$.

Неограниченное сверху множество определяется, используя приём отрицания, как множество, не являющееся ограниченным сверху. Сформулируем это определение в развёрнутом виде. Для этого в определении ограниченного сверху множества заменим формально квантор $\forall$ (любой, всякий) на квантор $\exists$ (существует, найдётся), и наоборот, кван-

[1] *Георг Кантор* (1845–1918) – немецкий математик, создатель теории множеств, ставшей краеугольным камнем в математике. Кантор ввёл понятие взаимно однозначного соответствия между элементами множеств и доказал, что действительных чисел «больше», чем натуральных.

тор $\exists$ заменим на знак $\forall$; кроме того, знак неравенства поменяем на противоположный. Получим следующее определение: непустое множество X называется *неограниченным сверху*, если для любого (сколь угодно большого) положительного числа M найдется число $x' \in X$, для которого $x' > M$. Аналогично формулируется определение множества, не ограниченного снизу: множество X не ограничено снизу, если для любого (сколь угодно большого) положительного числа M найдётся число $x' \in X$, для которого $x' < -M$.

Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным* (с двух сторон), если оно ограничено как сверху, так и снизу. Эквивалентное определение: множество X ограничено, если найдётся такое (положительное) действительное число M, что для любого $x \in X$ верно $|x| \leq M$. Например, интервал (a, b), отрезок $[a, b]$, а также конечное множество $\{1; 2; 8\}$ представляют собой примеры ограниченных множеств, а полупрямая $(-\infty, b)$ и множество целых отрицательных чисел Z_- являются множествами, ограниченными сверху, но не ограниченными снизу. Как следует из определения, множество не ограничено тогда и только тогда, когда оно не ограничено сверху или не ограничено снизу.

Точные грани и их свойства. Назовём число $\overline{x} \in X$ ($\underline{x} \in X$) *наибольшим* (*наименьшим*) *элементом* множества X, если $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \leq \overline{x}$ ($x \geq \underline{x}$). Отметим, что наибольший (наименьший) элемент множества X, если он существует, то всегда принадлежит множеству. Например, наибольший элемент сегмента $[a, b]$ равен b, а наименьший элемент множества натуральных чисел равен 1. Однако не все числовые множества имеют наибольший или наименьший элементы. Например, полуинтервал $[a, b)$ не имеет наибольшего элемента.

Введём понятия точных граней числового множества, обобщающих понятия наибольшего и наименьшего элементов.

Пусть X – ограниченное множество действительных чисел. *Точной верхней гранью*, или супре́мумом (от лат. $supr\acute{e}mum$ – самый высокий) множества X называется наименьшая из его верхних граней. Аналогично, *точной нижней гранью*, или и́нфимумом (от лат. $\acute{i}nfimum$ – самый низкий) множества X называется наибольшая из его нижних граней. Например, для множества $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ рациональных чисел, квадрат которых меньше двух, $\sup X = \sqrt{2}$ и $\inf X = -\sqrt{2}$.

Заметим, что эти определения ничего не говорят о том, принадлежит ли $\sup X$ и $\inf X$ множеству X или нет. В случае, когда $\overline{x} = \sup X \in X$, говорят, что $\overline{x}$ является наибольшим элементом X (супремум достигается на элементе $\overline{x}$). В случае $\underline{x} = \inf X \in X$ говорят, что $\underline{x}$ является наименьшим элементом X (инфимум достигается на элементе $\underline{x}$).

Для неограниченного сверху (снизу) множества X по определению полагают $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$). Таким образом, в отличие от наибольшего и наименьшего элементов, точные грани существуют у любого непустого множества $X \subset \mathbb{R}$.

Например, $\inf[a, b] = a$, $\inf(a, b) = a$, $\sup N = +\infty$. Для множества X, состоящего из чисел вида $\{2; \frac{1}{n}\}$, где $n \in \mathbb{N}$, имеем: $\inf X = 0$ (не достигается), $\sup X = 2$ (достигается и совпадает с наибольшим элементом).

Сформулируем определения точных граней, эквивалентные приведенным выше. Действительное число $\overline{x}$ называется $\sup X$, если:

1) $\overline{x}$ есть верхняя грань X, т.е. для всех элементов $x \in X$ верно $x \leqslant \overline{x}$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $x' \in X$ такой, что $x' > \overline{x} - \varepsilon$ (т.е. к $\overline{x}$ можно сколь угодно близко «подобраться» из множества X, точная грань «вплотную» подходит к X).

Аналогичное определение можно сформулировать и для точной нижней грани. Действительное число $\underline{x}$ называется $\inf X$, если:

1) $\underline{x}$ есть нижняя грань X, т.е. для всех элементов $x \in X$ верно $x \geqslant \underline{x}$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $x' \in X$ такой, что $x' < \underline{x} + \varepsilon$.

Наконец, приведём еще два определения точных граней: действительное число $\overline{x}$ называется $\sup X$, если:

1) $\forall x \in X \Rightarrow x \leqslant \overline{x}$;

2) $\forall x' < \overline{x}\ \exists x \in X \Rightarrow x > x'$.

Аналогично, действительное число $\underline{x}$ называется $\inf X$, если:

1) $\forall x \in X \Rightarrow x \geqslant \underline{x}$;

2) $\forall x' > \underline{x}\ \exists x \in X \Rightarrow x < x'$.

Открытые и замкнутые множества. Назовём *окрестностью точки* x_0 на числовой прямой любой интервал этой прямой с центром в этой точке. Например, интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ называется δ-окрестностью точки x_0, а тот же интервал с выколотым центром (т.е. без точки x_0) – проколотой δ-окрестностью точки x_0.

Точка x_0 называется *предельной точкой* (*точкой сгущения*) множества X, если в любой окрестности точки x_0 имеется по крайней мере ещё одна точка множества X, отличная от точки x_0. Отсюда следует, что в любой окрестности предельной точки всегда содержится бесконечное число точек множества X. При этом сама предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X. Точка x_0, не являющаяся предельной точкой множества X, называется *изолированной точкой* множества X. Назовём точку x_0 *внутренней точкой* множества X, если она принадлежит множеству X вместе с некоторой достаточно малой её окрестностью.

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Если множество не имеет ни одной предельной точки, то его тоже принято считать замкнутым. Пример замкнутого множества – отрезок $[a, b]$. Кроме своих предельных точек, замкнутое множество может также содержать изолированные точки. Множество называется *открытым*, если каждая его точка является для него внутренней. Пример окрытого множества – интервал (a,b).

Точка x называется *граничной точкой* множества X, если в любой её окрестности есть как точки, принадлежащие множеству, так и точки, ему не принадлежащие. Множество всех граничных точек данного множества образуют его *границу*. *Внешние точки* – это те, которые не являются ни внутренними, ни граничными. Используя понятие граничной точки, можно определить замкнутое множество как множество, содержащее все свои граничные точки.

Выпуклое множество (на числовой прямой, а также на плоскости, в пространстве) – это множество, которое наряду с любыми двумя точками A и B содержит также весь отрезок AB. Примеры выпуклых множеств: отрезок, прямая, круг, плоскость. Однако, например, окружность не является выпуклым множеством.

1.3 Последовательности действительных чисел

«В сочетании цифр есть безусловная магия, не чувствуют ее лишь люди, начисто лишенные воображения.».

Борис Акунин. Весь мир театр.

В элементарной математике уже встречались последовательности в виде арифметических и геомерических прогрессий и изучались их свойства. Обобщим эти понятия.

Понятие (бесконечной) числовой последовательности. Если каждому натуральному числу n поставить в соответствие некоторое действительное число x_n, то полученное (счётное) множество чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ будет называться *числовой последовательностью* и обозначаться $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ или просто $\{x_n\}$.[1] При этом числа x_n называются *членами* последовательности.

Последовательности часто задаются формулами их общего члена, например, $x_n = n^2$, $y_n = \frac{1}{n}$, $z_n = \sin n$, $u_n = 5n+2$, $p_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ и т.д.

Фактически, последовательность – это множество занумерованных действительных чисел, поэтому на них распространяются основные определения и свойства множеств.

Ограниченные и неограниченные последовательности. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *ограничена сверху (снизу)*, если существует такое действительное число M (m), что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$

[1] В дальнейшем будем опускать термин «числовая», везде понимая под последовательностью (если не оговорено иное) последовательность действительных чисел.

выполнено неравенство $x_n \le M$ ($x_n \ge m$). Числа M и m называются в этом случае *верхней и нижней гранями* последовательности $\{x_n\}$ соответственно.

Например, последовательность $x_n = \sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) ограничена снизу, поскольку $\sqrt{n} \ge 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Число 0 является в данном случае одной из нижних граней (любое число, меньшее 0, например (-1), также будет нижней гранью). При этом эта последовательность не ограничена сверху.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной с двух сторон*, или просто *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т.е. если существуют такие действительные числа m и M, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $m \le x_n \le M$.

Например, последовательность $x_n = \cos n$ ($n \in \mathbb{N}$) ограничена как снизу, так и сверху, поскольку $-1 \le \cos n \le 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Можно сформулировать определение ограниченной последовательности в эквивалентном виде: $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует число $A \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \le A$. Используя математическую символику, последнее определение записывается кратко:

$$\{x_n\} - \text{ограничена} \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, A \in \mathbb{R} :\ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ |x_n| \le A,$$

где двоеточие заменяет слова «такое, что».

Если теперь мы заменим в последнем определении квантор всеобщности ($\forall$) квантором существования ($\exists$) и наоборот, и поменяем знак в неравенстве на противоположный, то получим отрицание определения, т.е. определение того, что последовательность является неограниченной. А именно, последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого положительного числа A найдётся натуральный номер N такой, что $|x_N| > A$:

$$\{x_n\} - \text{не ограничена} \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\, A \in \mathbb{R}\ \ \exists\, N = N(A) \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ |x_N| > A.$$

Например, последовательность $x_n = n^2$ не ограничена сверху, так как для любого (сколь угодно большого!) числа $A > 0$ найдётся номер N такой, что $|x_N| = N^2 > A$. Для этого достаточно взять $N > \sqrt{A}$, например, $N = [\sqrt{A}] + 1$, где $[\sqrt{A}]$ – целая часть числа $\sqrt{A}$.

Введём еще несколько важных определений.

Арифметические операции над последовательностями. Рассмотрим две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Последовательность $\{x_n+y_n\} = \{x_1+y_1, \dots, x_n+y_n, \dots\}$ называется *суммой* $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$; последовательность $\{x_n-y_n\} = \{x_1-y_1, \dots, x_n-y_n, \dots\}$ – их *разностью*; последовательность $\{x_n\cdot y_n\} = \{x_1\cdot y_1, \dots, x_n\cdot y_n, \dots\}$ — *произведением*; последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{x_1}{y_1}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots\right\}$ – *частным* (если $y_k \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$).

Например, если $x_n = (-1)^n$, а $y_n = 1/n$, то частным этих последовательностей будет последовательность $\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого (сколь угодно большого) положительного действительного числа A найдётся такой номер $N = N(A)$ (зависящий от A), что для любого $n \geq N$ (т.е. начиная с этого номера) будет выполнено: $|x_n| > A$.

Например, последовательности $x_n = n^4$, $y_n = (-1)^n n$ являются бесконечно большими.

Иными словами, последовательность является бесконечно большой, если её предел равен бесконечности ($+\infty$, $-\infty$, ∞), см. далее «Предел последовательности».

Заметим, что если последовательность $\{x_n\}$ – бесконечно большая, то она, очевидно, является неограниченной. Обратное, вообще говоря, неверно.

Например, последовательность $\{x_n\} = \{0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots\}$ – неограниченная, но не бесконечно большая.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного действительного числа ε найдётся натуральный номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geq N$ будет выполнено: $|x_n| < \varepsilon$.

Например, последовательность $x_n = \dfrac{1}{\ln n}$ $(n = 2, 3, 4, \dots)$ – бесконечно малая, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geq N$ будет выполнено: $\left|\dfrac{1}{\ln n}\right| < \varepsilon$. Действительно, решая последнее неравенство относительно n, находим этот номер: $\ln n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, т.е. $n > e^{\frac{1}{\varepsilon}}$. Наименьшим $N(\varepsilon)$, удовлетворяющим последнему неравенству, будет $N = [e^{\frac{1}{\varepsilon}}] + 1$.

Иными словами, последовательность является бесконечно малой, если её предел равен нулю (см. далее «Предел последовательности»).

Свойства бесконечно малых последовательностей.

1. Сумма $\{\alpha_n + \beta_n\}$, разность $\{\alpha_n - \beta_n\}$ двух бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ также являются бесконечно малыми последовательностями. Как следствие, сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

2. Произведение $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ ограниченной последовательности $\{x_n\}$ на бесконечно малую последовательность $\{\alpha_n\}$ является бесконечно малой последовательностью.

Рассмотрим, например, предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$. Так как последовательность $\sin n$ ограничена ($|\sin n| \le 1$), а последовательность $1/n$ сходится к 0, то данный предел равен нулю.

3. Всякая бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\}$ является ограниченной.

4. Произведение $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ двух (а значит, любого конечного числа) бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ является бесконечно малой последовательностью.

5. Если $\{y_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то начиная с некоторого номера n определена последовательность $\{1/y_n\}$, которая является бесконечно малой последовательностью. Если последовательность $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая и $\alpha_n \neq 0$ для любого натурального номера n, то последовательность $\{1/\alpha_n\}$ является бесконечно большой.

Предел последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности.

Опр. 1. Действительное число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного (сколь угодно малого!) числа ε существует натуральный номер $N = N(\varepsilon)$ (зависящий от ε) такой, что при всех $\forall n \ge N$ выполяется условие: $|x_n - a| < \varepsilon$. Последовательность $\{x_n\}$ называется в этом случае *сходящейся* к числу a. Обозначение: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, или $x_n \to a$ при $n \to +\infty$. Если последовательность не является сходящейся, то говорят, что она *расходится.*

Приведём ещё два определения сходящейся последовательности, эквивалентные приведённому выше.

Опр. 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если найдётся действительное число a такое, что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой. Число a называется в этом случае *пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ в Опр. 1 можно переписать в виде: $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Тогда получим, что последовательность сходится к a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся натуральный номер $N = N(\varepsilon)$, удовлетворяющий условию: $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ $\forall n \geq N$. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ будем называть $\varepsilon-$*окрестностью* точки a и обозначать $B_\varepsilon(a)$.

Опр. 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если найдётся действительное число a такое, что в любой $\varepsilon-$окрестности точки a содержатся все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера (зависящего, вообще говоря, от ε).

Примеры сходящихся последовательностей:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0, \quad \left\{\frac{2n+1}{n}\right\} \to 2, \quad \left\{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right\} \to 0, \quad \{a^n\} \to 0 \text{ при } |a| < 1,$$

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} \to e, \quad \left\{\frac{n}{2^n}\right\} \to 0, \quad \left\{\frac{\ln n}{n}\right\} \to 0.$$

Понятие бесконечного предела. Последовательности, имеющие бесконечный предел, относят к расходящимся, как и те, у которых предел не существует.

Опр. 4. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к* $+\infty$ (*стремится к* $-\infty$) при $n \to +\infty$, если для любого действительного $A > 0$ найдётся номер N, зависящий от A, такой, что $x_n > A$ ($x_n < -A$) $\forall n \geq N$.

Обозначения: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ (соответственно, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$), или $x_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ (соответственно, $x_n \to -\infty$ при $n \to +\infty$).

Опр. 5. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *стремится к бесконечности* (без указания знака) при $n \to +\infty$, если для любого действительного $A > 0$ найдётся номер N, зависящий от A, такой, что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n| > A$ (т.е. если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой).

Обозначения: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$, или $x_n \to \infty$ при $n \to +\infty$.

Примеры расходящихся последовательностей: $\{-n\} \to -\infty$, $\{n^3\} \to +\infty$, $\{\ln \frac{1}{n}\} \to -\infty$, $\{2^n\} \to +\infty$, $\{a^n\} \to \infty$ при $|a| > 1$, $\{(-1)^n n\}$ (бесконечный предел); $\{(-1)^n\}$, $\{\sin n\}$ (предел не существует).

Свойства сходящихся последовательностей.

1. Сходящаяся последовательность имеет один и только один предел.

2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. Тогда существует предел суммы и разности этих последовательностей, причём $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

4. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. Тогда существует предел произведения этих последовательностей, причём $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

5. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, причем $b \neq 0$. Тогда существует предел частного этих последовательностей, причём $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

6. Теорема (*О предельном переходе под знаком неравенства*). Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ и последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$) при всех $n \geq N$ для некоторых $b \in \mathbb{R}$ и $N \in \mathbb{N}$. Тогда и предел этой последовательности также удовлетворяет неравенству $a \geq b$ (соответственно, $a \leq b$).

Замечание. Из того, что $x_n > b$ при всех натуральных n, не следует, вообще говоря, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n > b$ (а лишь $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geq b$). Например, $1 + \frac{1}{n} > 1$, но $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

Следствие 1. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – сходящиеся последовательности и существует натуральный номер N такой, что $x_n \leq y_n$ $\forall n \geq N$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Следствие 2. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Если для любого натурального n верно, что $x_n \in [b, c]$, то $a \in [b, c]$.

7. (*Принцип двусторонней ограниченности*). Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$. Если последовательность $\{z_n\}$ такова, что для всех натуральных $n \geq N$ выполнено двойное неравенство $x_n \leq z_n \leq y_n$, то $\{z_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

Пример 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится, а последовательность $\{y_n\}$ – расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей

а) $\{x_n + y_n\}$; б) $\{x_n y_n\}$?

Решение. а) Последовательность $\{x_n + y_n\}$ – расходится. Действительно, если бы она сходилась, то сходилась бы и разность последовательностей $\{x_n + y_n\}$ и $\{x_n\}$. Но это невозможно, так как $\{(x_n + y_n) - x_n\} = \{y_n\}$, а $\{y_n\}$ – расходится.

б) Последовательность $\{x_n y_n\}$ может как сходиться, так и расходиться. Например, $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ – сходится, $\{y_n\} = (-1)^n$ – расходится, $\{x_n y_n\} = \frac{(-1)^n}{n}$ – сходится. Или $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ – сходится, $\{y_n\} = (-1)^n n$ – расходится, $\{x_n y_n\} = (-1)^n$ – расходится.

Пример 2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\{y_n\}$ – произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$? Привести различные примеры.

Решение. Если $\{y_n\}$ имеет конечный предел, то да. Например, $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = 2 + \frac{1}{n}$. Если $\{y_n\} \to \pm\infty$, то $\{x_n y_n\}$ может как сходиться, так и расходиться. Например, $\{x_n y_n\}$ сходится для $\{x_n\} = \frac{1}{n^2}$, $\{y_n\} = n$ и расходится для $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = n^2$.

Если $\{y_n\}$ не имеет предела, то $\{x_n y_n\}$ может и сходиться, и расходиться. Например, она сходится при $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = (-1)^n$, и расходится при $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = (-1)^n n$.

Монотонные последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, если для любого натурального номера n выполняется неравенство $x_n \le x_{n+1}$ $(x_n \ge x_{n+1})$. В частности, если для любого натурального номера n выполняется строгое неравенство $x_n < x_{n+1}$ (соответственно, $x_n > x_{n+1}$), то последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*).

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*, причём убывающие и возрастающие – *строго монотонными.*

Одним из важнейших свойств монотонных последовательностей является следующее.

Теорема. *Если последовательность $\{x_n\}$ не убывает и ограничена сверху (не возрастает и ограничена снизу), то она сходится.*

Можно показать, что последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ является монотонно возрастающей и ограниченной сверху. Предел этой последовательности есть иррациональное число $e = 2,718281828459045\ldots$. Предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ называют *2-м замечательным пределом.*

Известна ещё одна формула для числа e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Понятие подпоследовательности. Пусть $\{x_n\}$ – числовая последовательность, $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ – натуральные числа такие, что $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \ldots$. Тогда последовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$

называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\{x_{k_n}\}$.

Например, из последовательности $x_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ можно выделить две подпоследовательности: с чётными номерами ($n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, тогда $x_{2k} = 1$) и с нечётными номерами ($n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, тогда $x_{2k-1} = -1$).

Теорема 1. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a, то любая её подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ также сходится к a.*

Следствие. Если из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить две подпоследовательности, сходящиеся к разным пределам, то последовательность $\{x_n\}$ расходится.

Докажем, например, расходимость последовательности $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим подпоследовательность x_{2k} членов с чётными номерами $x_{2k} = 1$ $(k \in \mathbb{N})$, которая, очевидно, сходится к числу 1. С другой стороны, рассмотрим подпоследовательность с нечётными номерами $x_{2k-1} = -1$, которая сходится к своему пределу (-1). Так как нашлись две подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам, то это противоречит теореме о единственности предела. Это означает, что x_n – расходится.

Важную роль в теории последовательностей играет следующая теорема.

Теорема 2 (*Больца́но–Вейерштра́сса*). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Существуют различные приёмы вычисления пределов последовательностей, которые рассматриваются на семинарах.

Раскрытие неопределённостей. При вычислении пределов наибольший интерес представляют ситуации с так называемыми «неопределённостями». Например, при вычислении предела вида $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ может оказаться, что обе последовательности $f(n)$ и $g(n)$ являются в точке a бесконечно малыми (или, наоборот, бесконечно большими). В этом случае говорят, что имеют дело с *неопределённостью* вида $\frac{0}{0}$ (или, соответственно, с *неопределённостью* $\frac{\infty}{\infty}$). Для вычисления предела в этом случае надо, используя различные приёмы, преобразовать данный предел к виду, более удобному для его вычисления. Вычислить предел в этой, часто непростой, ситуации называется «раскрыть неопределённость».

Пример 1. Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7n+1}{5n^3-3n+2}$.

Решение. Проанализируем выражение под знаком предела. Заметим, что имеется неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, поскольку при $n\to+\infty$ и числитель, и знаменатель дроби стремятся к бесконечностям. Найдём главный член в числителе (это $7n$), в знаменателе (это $5n^3$, он быстрее других слагаемых в знаменателе стремится к бесконечности) и вынесем за скобку в числителе и знаменателе, соответственно, n и n^3. После этого сократим дробь на общий множитель n:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{7n+1}{5n^3-3n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(7+\frac{1}{n})}{n^3(5-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3})}=\lim_{n\to+\infty}\frac{7+\frac{1}{n}}{n^2(5-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3})}.$$

Проверим, сохранилась ли неопределённость. Устремив $n\to+\infty$, видим, что теперь числитель стремится к 7, а знаменатель, по-прежнему, к ∞. Неопределённость пропала, предел можно вычислить, он оказался равен 0.

Пример 2. Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^5-3n+7}{3n^3-2}$.

Решение. Как и предыдущем примере, имеем неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которой разделим числитель и знаменатель на n^3:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5-3n+7}{3n^3-2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-\frac{3}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{3-\frac{2}{n^3}}.$$

Поскольку числитель стремится к $+\infty$, а знаменатель к 3, то предел равен $+\infty$.

Пример 3. Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^4+27}{3n^4-2n^3+5}$.

Решение. Чтобы раскрыть неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ и вычислить предел, разделим числитель и знаменатель дроби на n^4:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+27}{3n^4-2n^3+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{27}{n^4}}{3-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^4}}.$$

Поскольку числитель стремится к 1, а знаменатель к 3, то предел равен $\dfrac{1}{3}$.

См. также о последовательностях и их пределах видеоурок **Валерия Ивановича Опойцева** (псевдоним: Босс, д.ф.-м.н., профессор, ИПУ РАН, Кафедра проблем управления МФТИ) на его сайте:

https://oschool.ru/lectures/h-mats/4k84bD7fl

(Последовательности и пределы).

Об авторе:

http://www.koob.ru/boss/

2 ЛЕКЦИЯ: Функции одной действительной переменной: ограниченность, монотонность, экстремумы, предел и непрерывность

«Предмет математики настолько серьезен, что полезно не упустить случая сделать его немного занимательным».
Б. Паскаль (1623–1662), французский математик, механик, физик, литератор и философ.

Краткое содержание.

I. Понятие функции, системы координат. Понятие (однозначной) функции одного действительного переменного. Область определения, область значений, график. Ограниченные (неограниченные) функции, точные грани. Чётные (нечётные) функции. Монотонные функции. Периодические функции. Выпуклые функции, точки перегиба. Обратная функция. Свойства взаимно обратных функций. Экстремумы.

Декартова и полярная системы координат. Явный, неявный, параметрический способы задания функции. Элементарные функции (включая обратные тригонометрические и гиперболические функции). Примеры неэлементарных функций (функция Дирихле, сигнум, целая и дробная части.)

II. Предел функции. Предел функции (по Коши и по Гейне, их эквивалентность), графический смысл предельного значения. Бесконечный предел $(+\infty, -\infty, \infty)$. Пределы при $x \to \pm\infty$, $x \to \infty$. Односторонние пределы. Равенство в точке односторонних пределов как необходимое и достаточное условие существования предела в этой точке. Арифметические операции над функциями, имеющими предельные значения в заданной точке. Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их сравнение (понятия о-малого, О-большого). Замечательные пределы. Раскрытие неопределённостей (кроме правила Лопиталя и формулы Тейлора).

III. Непрерывность функции. Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Непрерывность элементарных функций на их области определения. Арифметические операции над непрерывными функциями. Понятие сложной функции. Непрерывность сложной функции. Основные свойства непрерывных функций. Классификация точек разрыва.

2.1 Функции одной переменной: определение, ограниченность, монотонность, выпуклость. Явный, неявный и параметрический способы задания

«Лучший способ изучить что-либо – это открыть самому».

Д. Пойа (1887–1985), венгерский, швейцарский и американский математик, популяризатор науки.

Понятие (однозначной) функции одной переменной. Пусть X – непустое множество действительных чисел и каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное число $y \in \mathbb{R}$. Тогда говорят, что на множестве X задана *функция* $y = f(x)$. При этом x называется *независимой переменной* (или *аргументом*), y – *зависимой переменной*, или значением функции в точке x. Множество X называется *областью определения* функции, а множество $Y = \{y \mid y = f(x),\ x \in X\}$ – *областью значений* функции. Говорят, что функция f *отображает* множество X на множество Y, причём y является *образом* x. Обозначение $f:\ X \to Y$.

Графиком функции называется множество точек плоскости вида $(x, f(x))$, где $x \in X$.

Пример 1. Найти области определения и области значений функций:

$$\text{а) } y = \cos 2x,\ \text{б) } y = \operatorname{tg} x,\ \text{в) } y = \operatorname{sgn} x,\ \text{г) } y = 1 - x^2,\ \text{д) } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Решение. а) $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = [-1, 1]$, б) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi n\}$, $E(f) = \mathbb{R}$, в) $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = \{-1; 0; 1\}$; г) $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = (-\infty, 1]$; д) $D(f) = \mathbb{R}$, $E(f) = (0, +\infty)$.

Ограниченные и неограниченные функции. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной сверху (снизу)* на этом множестве, если существует такое число M (соответственно, m), что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \le M$ (соответственно, $f(x) \ge m$).При этом число M (соответственно, m) называется *верхней гранью* (соответственно, *нижней гранью*) функции $y = f(x)$ на указанном множестве.

Если функция ограничена сверху числом M (соответственно, снизу числом m), то это означает, что весь график функции расположен на плоскости Oxy не выше прямой $y \equiv M$ (соответственно, не ниже прямой $y \equiv m$).

Например, функция $y = x^2$, если её рассматривать на всём множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, ограничена снизу (в качестве нижней грани можно взять, например, число $m = 0$ или любое отрицательное число), но не ограничена сверху.

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной с двух сторон* (или просто *ограниченной*) на этом множестве, если существует такое положительное число M, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$ (т.е. $-M \leq x \leq M$). В противном случае, т.е. если $\forall M > 0\ \exists x \in X$: $|f(x)| > M$, функция называется *неограниченной* на X. Таким образом, ограниченность функции означает ограниченность её области значений.

Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, поскольку $|\sin x| \leq 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$; показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) ограничена снизу, поскольку $a^x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, а функция $y = x^3$ не является ограниченной на множестве действительных чисел ни сверху, ни снизу.

Точные грани функции. Назовём *точной верхней* (соответственно, *точной нижней*) *гранью функции* $y = f(x)$, $x \in X$, точную верхнюю (соответственно, нижнюю) грани множества её значений. Обозначения:

$$\sup_{x \in X} f(x), \quad \inf_{x \in X} f(x).$$

Если точные грани достигаются при некоторых $x \in X$, тогда они называются, соответственно, *наибольшим и наименьшим значениями функции.*

Например, для функции $y = \sin x$ точная верхняя грань равна 1, причём она достигается в точках вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Любое число, большее 1, будет верхней гранью функции, но никакое число, меньшее 1, верхней гранью уже не является. У функции $y = \operatorname{arctg} x$ точная верхняя грань также существует и равна $\frac{\pi}{2}$, однако не достигается ни при каких $x \in \mathbb{R}$.

Чётные (нечётные) функции. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, симметричном относительно точки $x = 0$, называется *чётной* (*нечётной*), если при всех $x \in X$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ (соответственно, $f(-x) = -f(x)$). Функцию, не являющуюся ни чётной, ни нечётной (на множестве X), будем называть функцией *общего вида.*

График чётной функции всегда симметричен относительно оси ординат, а нечётной – имеет центр симметрии в начале координат.

Примеры чётных функций: $y = |x|$, $y = x^2$, $y = 1/x^4$, $y = \cos x$. Заметим, что любая сложная функция вида $y = f(g(x))$ будет чётной, если «внутренняя» функция $g(x)$ – чётная (при любой «внешней» функции $y = f(g)$). Например, $y = \sqrt[3]{\cos x - 1} + 5$ – чётная функция, так как её можно представить в виде $y = f(g(x))$, где $f(g) = \sqrt[3]{g-1} + 5$, и «внутренняя» функция $g(x) = \cos x$ – чётная.

Докажем чётность функции $y(x) = \sqrt[3]{\cos x - 1} + 5$, используя определение чётной функции. Тогда получим, что при всех $x \in \mathbb{R}$: $y(-x) = \sqrt[3]{\cos(-x) - 1} + 5 = \sqrt[3]{\cos x - 1} + 5 = y(x)$, что и означает, что функция является чётной.

Примеры нечётных функций: $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sqrt[5]{x}$, а также любая сложная функция вида $y = f(g(x))$ будет нечётной, если обе функции $y = f(g)$ и $g = g(x)$ являются нечётными. Например, функция $y = \operatorname{tg}^3 x$ – нечётная функция.

Докажем тот факт, что $y(x) = \operatorname{tg}^3 x$ – нечётная функция, опираясь на определение нечётной функции: при всех $x \neq \pi/2 + \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$ верно тождество $y(-x) = \operatorname{tg}^3(-x) = -\operatorname{tg}^3 x = -y(x)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что если функция $y = f(x)$ определена на множестве X, симметричном относительно $x = 0$, то её всегда можно представить (причём единственным образом!) в виде суммы чётной и нечётной функций:

$$f(x) \equiv \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

где $\varphi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ – чётная функция, а $\psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ – нечётная функция.

Например, представим хорошо известную квадратичную функцию в виде суммы чётной и нечётной функций (на множестве $\mathbb{R}$):

$$ax^2 + bx + c \equiv \frac{(ax^2 + bx + c) + (a(-x)^2 + b(-x) + c)}{2} +$$

$$+\frac{(ax^2 + bx + c) - (a(-x)^2 + b(-x) + c)}{2} = \underbrace{ax^2 + c}_{\varphi(x)} + \underbrace{bx}_{\psi(x)}.$$

Монотонные функции. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$).

Например, функция $y = x^3 + 1$ возрастает на всём множестве $\mathbb{R}$, поскольку для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) = x_1^3 + 1 < x_2^3 + 1 = f(x_2)$. Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и убывает на отрезке $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; дробно-рациональная функция $y = 1/x$ убывает на каждом из промежутков $x \in (-\infty, 0)$ и $x \in (0, +\infty)$.

Функция $y = f(x)$ называется *невозрастающей* (*неубывающей*) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \leq f(x_2)$).

Иными словами, функция возрастает (убывает) на множестве X, если бóльшему значению аргумента она ставит в соответствие бóльшее (соответственно, мéньшее) значение функции.

По аналогии с последовательностями, возрастающие и убывающие функции называют (строго) *монотонными* функциями. Исследовать функцию на монотонность означает найти промежутки её возрастания и убывания. Наряду с убывающими и возрастающими, к монотонным относят неубывающие и невозрастающие функции.

Примеры: $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$ – возрастающие функции; $y = \log_{0,1} x$, $y = -x^3$, $y = (\frac{1}{3})^x$ – убывающие функции; $y = [x]$ (целая часть числа x, антье) и $y = \operatorname{sgn} x$ (сигнум, знак числа x) – неубывающие функции.

Конечно, не все функции являются монотонными на своей области определения. Существуют немонотонные функции: $y = x^2$, $y = |x|$, $y = \sin x$, $y = \{x\}$ или, например, функция Дирихлé:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рационально}, \\ 0, & \text{если } x - \text{иррационально}. \end{cases}$$

Периодические функции. Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *периодической*, если существует такое неравное нулю число $T \in \mathbb{R}$ (называемое *периодом*), что для любого $x \in X$ числа $x \pm T$ также принадлежат множеству X, и при этом $\forall x \in X$ выполняется условие периодичности: $f(x + T) = f(x)$. Наименьший положительный период (при условии, что он существует) называется *главным*, или *основным, периодом* функции.

Примеры периодических функций: $y = \sin x$, $y = \cos x$ (главный период $T = 2\pi$), $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (главные периоды равны π), $y = \{x\}$ (дробная часть числа x, главный период равен 1).

Класс периодических функций весьма широк, так как любая сложная функция $y = f(g(x))$, у которой «внутренняя» функция $g(x)$ является периодической, также будет периодической.

Например, функция $y = \dfrac{5\cos x - 1}{\cos^2 x - 3\cos x}$ является периодической, поскольку её можно представить в виде $y = f(g(x))$, где $g(x) = \cos x$ (периодическая функция), а $f(g) = \dfrac{5g-1}{g^2-3g}$ («внешняя» функция может быть любой, не обязательно периодической).

Из определения периодической функции вытекают её *свойства*:

1) Если периодическая с периодом T функция $y = f(x)$ определена в некоторой точке x_0, то она определена во всех точках вида $x_0 + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$, и принимает в них то же значение: $f(x_0 + Tn) = f(x_0)$. Если же периодическая с периодом T функция не определена в точке x_0, то она не определена и во всех точках вида $x_0 + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) График периодической функции представляет собой последовательность одинаковых повторяющихся участков длиной, равной периоду T.

3) Если периодическая функция дифференцируема, то её производная также является периодической функцией.

4) Если функция $y = f(x)$ периодична с периодом T, то функция $y = a \cdot f(bx + c) + d$, где a, b, c, d – заданные коэффициенты, также периодична, причём её период равен $\frac{T}{|b|}$.

Например, период функции $f(x) = 13\cos 5x$ равен $\dfrac{2\pi}{5}$, а у функции $f(x) = -2\operatorname{tg}\dfrac{x}{7} + 6$ период равен 7π.

5) Если даны две периодические функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ с периодами, соответственно, T_1 и T_2, то период их суммы, разности, произведения и частного (при условии, что он существует) будет равен наименьшему положительному числу, которое при делении на T_1 и T_2 даёт в частном целые числа.

Например, функция $y = 5\sin 3x$ периодична с периодом $T_1 = 2\pi/3$, а функция $y = \cos 2x$ имеет период $T_2 = \pi$. Их сумма $y = 5\sin 3x + \cos 2x$ является периодической с периодом $T = 2\pi$.

Однако не всегда сумма двух периодических функций является периодической функцией.

Например, обе функции $y = \sin x$ и $y = \cos \pi x$ являются периодическими. Но так как их периоды несоизмеримы (один из них $T_1 = 2\pi$ иррационален, а другой $T_2 = 2$ – рационален), то обший период T не существует, а значит функция $y = \sin x + \cos \pi x$ не является периодической.

6) Постоянная функция $y = \text{const}$ удовлетворяет определению периодической функции, при этом в качестве периода у неё может выступать произвольное положительное действительное число. Однако у данной функции не существует главного периода, так как не существует наименьшего положительного действительного числа.

Выпуклые функции. Точки перегиба. Сформулируем определение выпуклой вниз (вверх) функции, в основе которого лежит неравенство Йе́нсена[1]. Функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, называется *выпуклой вниз* на этом отрезке, если для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполнено неравенство:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Если это неравенство является строгим при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, что $x_1 \neq x_2$, то функцию $f(x)$ называют *строго выпуклой вниз* на отрезке $[a, b]$. Геометрически выпуклость вниз означает, что любая хорда графика лежит не ниже стягиваемой ею дуги кривой.

Функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, называется *выпуклой вверх*[2] на этом отрезке, если $\forall\, x_1, x_2 \in [a, b]$ верно неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Существует другое, эквивалентное данному, определение: функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, называется *выпуклой вниз* на этом отрезке, если при всех $x_1, x_2 \in [a, b]$ и произвольных $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_1 + p_2 = 1$, выполнено неравенство

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2) \le p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2).$$

Если в последнем неравенстве заменить знак "$\le$" на знак "$\ge$", то получим определение функции, выпуклой вверх.

[1] *Йенсен Йоганн Людвиг* (1859–1925) – датский математик, занимался теорией функций. Сформулировал основы теории выпуклых функций.

[2] Иногда такие функции называют *вогнутыми*.

Между выпуклыми вниз и вверх функциями существует простая связь: функция f выпукла вверх тогда и только тогда, когда функция $(-f)$ выпукла вниз.

Точка $(x_0, f(x_0))$, принадлежащая графику функции, называется *точкой перегиба*, если в этой точке существует касательная к графику, причём справа и слева от этой точки функция имеет разные направления выпуклости.

Например, точка $(0,0)$ является единственной точкой перегиба для графика функции $y = x^3$, а точки $(\pi n, 0)$ являются точками перегиба для синусоиды $y = \sin x$.

Понятие обратной функции. Свойства взаимно обратных функций. Пусть функция $y = f(x)$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}$, такова, что разным значениям аргумента ставит в соответствие разные значения функции, т.е. из неравенства $x_1 \neq x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ следует неравенство $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда такая функция называется *обратимой*, и у неё существует *обратная функция*, которую обозначают $y = f^{-1}(x)$. Обозначим Y – область значений функции $f(x)$. Обратная функция определена на множестве Y и каждому $y \in Y$ ставит в соответствие единственное $x \in X$ такое, что $y = f(x)$.

Пусть дана функция $y = f(x)$, $x \in X$. Чтобы найти обратную функцию, надо: 1) выразить из равенства $y = f(x)$ переменную x через переменную y. Получим: $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$ (не путать со степенью (-1), это просто условное обозначение). 2) Заменить переменную x в последнем равенстве на y, а y, наоборот, заменить на x. Получим $y = f^{-1}(x)$, $x \in Y$. Обратная функция найдена.

Свойства взаимно обратных функций.

1) Область определения $D_f = \{x \mid x \in X\}$ исходной функции является для обратной функции областью значений, и наоборот, область значений $E_f = \{f(x) \mid x \in X\}$ исходной функции является для обратной функции областью определения, т.е.

$$D_f = E_{f^{-1}}, \quad E_f = D_{f^{-1}}.$$

Например, рассмотрим пару взаимно обратных функций $y = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, и $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$. Отрезок $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ для синуса является в данном случае областью определения, а для арксинуса – областью значений. При этом отрезок $[-1, 1]$ для синуса является областью значений, а по отношению к арксинусу – его областью определения.

2) Чтобы найти обратную функцию, необходимо уравнение $y = f(x)$ разрешить относительно переменной x, т.е. привести к виду $x = f^{-1}(y)$, $y \in E_f$, а затем поменять местами переменные x и y: $y = f^{-1}(x)$, $x \in E_f$.

Найдём, например, обратную функцию для функции $y = \sqrt{x}$ на отрезке $[0,4]$ (обратная функция существует, поскольку $y = \sqrt{x}$ возрастает на указанном отрезке). Заметим, что $y \in [0,2]$ (это будущая область определения для обратной функции). Выражая x из данного равенства, получим: $x = y^2$, где $y \in [0,2]$. Осталось поменять x на y, а y на x: $y = x^2$, $x \in [0,2]$. Обратите внимание на то, что графики этих функций симметричны друг другу относительно $y = x$.

3) Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ $(x \in D_f)$, и $y = f^{-1}(x)$ $(x \in E_f)$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

Симметрия возникает в момент замены x на y, а y на x.

4) Справедливы тождества:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in D_f), \quad f(f^{-1}(x)) = x \quad (x \in E_f).$$

Например, $\arcsin(\sin x) = x$ $(x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ и $\sin(\arcsin x) = x$ $(x \in [-1,1])$. Или: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ $(x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ и $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$.

5) Взаимно обратные функции всегда имеют одинаковую монотонность (обе возрастают или обе убывают – каждая на своём множестве).

Например, функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, и поэтому обратная к ней функция $y = \arcsin x$ также возрастает (на отрезке $x \in [-1,1]$).

Важно: если функция $y = f(x)$ является строго монотонной, то у неё всегда существует обратная функция.

Локальные и глобальные экстремумы. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 своей области определения *локальный максимум (минимум)*, если найдётся окрестность этой точки, всюду в пределах которой функция определена и принимает значения ме́ньшие либо равные (соответственно, бо́льшие либо равные) значению функции в этой точке x_0. Иными словами, функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум (минимум)*, если найдётся окрестность этой точки такая, что для любого x из указанной окрестности верно неравенство: $f(x) \le f(x_0)$ (соответственно, $f(x) \ge f(x_0)$). Если последние неравенства строгие (для всех x из окрестности, отличных от x_0), то получим определения точек *строгого локального максимума (соответственно, минимума)*.

Локальным максимумом (*минимумом*) функции называется значение функции в точке локального максимума (минимума). Локальные максимумы и минимумы называют единым термином – *локальные экстремумы.*

Например, функция $y = \sin x$ в точках $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, имеет (строгие) локальные максимумы, равные 1. Функция $y = |x|$ имеет в точке $x = 0$ единственный строгий локальный минимум, равный 0. Постоянная функция $y \equiv 1$ имеет в любой точке x нестрогий локальный максимум (и одновременно нестрогий локальный минимум), равный 1. Функция $y = x$ (и, вообще, любая строго монотонная функция) и функция Дирихле не имеют локальных экстремумов.

Заметим, что слева от точки локального максимума функция не обязательно возрастает, а справа – убывает. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ строгий локальный максимум, но при этом слева от этой точки она убывает, а справа – возрастает!

Наряду с понятием локального экстремума существует понятие глобального экстремума. *Глобальным экстремумом* функции $f(x)$ на множестве X называется её наибольшее или наименьшее значение на этом множестве.

Напомним определение наибольшего значения функции. Число A называется *наибольшим значением функции $f(x)$ на множестве X*, если:

1) для любого $x \in X$ справедливо $f(x) \leq A$;

2) существует $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = A$.

Если экстремум достигается на границе множества, то его называют *краевым экстремумом.* Например, функция $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, имеет в точке $x = 0$ краевой минимум.

Декартова и полярная системы координат. Декартова (прямоугольная) система координат на плоскости определяется заданием начала координат (точка O), масштабной единицы и двух взаимно перпендикулярных числовых осей: оси абсцисс (Ox) и оси ординат (Oy). Каждой точке плоскости ставятся в однозначное соответствие два действительных числа – координаты точки (x, y) (x называется абсциссой, y – ординатой).

В полярной системе координат каждой точке плоскости также ставятся в соответствие две координаты (r, φ), но смысл их другой, это –

расстояние $r \geq 0$ от точки до начала координат (полюса) и угол φ, откладываемый от полярной оси против часовой стрелки (в полюсе угол не определён однозначно).

Если совместить начала координат у прямоугольной и полярной систем координат и пустить полярную ось вдоль оси абсцисс, выбрав одинаковые масштабные единицы, то декартовы координаты будут выражаться через полярные по следующим формулам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Например, в прямоугольной системе координат окружность радиуса a с центром в начале координат задаётся неявно уравнением $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$. Для перехода к полярным координатам в этом уравнении подставим $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$: $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = a^2$. После упрощения получим уравнение той же окружности, но в полярной системе координат: $r = a$.

Явный, неявный и параметрический способы задания функции. В любой из указанных выше систем координат функция может быть задана: явным образом, неявно и параметрически.

В декартовых координатах на плоскости функция, заданная уравнением, разрешённым относительно y, т.е. уравнением вида $y = f(x)$, $x \in X$, называется заданной *явно*.

Например, уравнение $y = \sqrt{1 - x^2}$ явно определяет *верхнюю полуокружность* единичного радиуса с центром в начале координат. Пример явного задания кривой в полярных координатах: $r = \varphi$, $\varphi \geq 0$ (*спираль Архимеда*).

Если зависимость y от x задаётся уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешённым относительно переменной y, то говорят о *неявном* задании функции.

Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задаёт единичную окружность с центром в начале координат.

Наконец, функция (в общем случае – плоская кривая) может определяться системой двух уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$ с параметром t из заданного множества $T \in \mathbb{R}$ (функции $x(t)$ и $y(t)$ будем считать непрерывными). В этом случае речь идёт о *параметрическом* задании.

Например, система параметрических уравнений $x = \cos t$, $y = \sin t$, где $t \in [0, 2\pi)$, задаёт ту же единичную окружность с центром в начале координат.

Элементарные функции. К *основным элементарным функциям* относятся:

– алгебраический многочлен n-й степени $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$;

– рациональная функция в виде отношения двух многочленов; в том числе степенна́я функция $(y = x^a)$;

– показательная $(y = a^x)$ и логарифмическая $(y = \log_a x)$ функции, в которых $a > 0, a \neq 1$;

– тригонометрические функции ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$) и обратные тригонометрические функции ($y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$).

Элементарные функции – это функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корня n-степени и возведение в целую степень) и композиций из перечисленных выше основных элементарных функций.

Ниже будут определены *гиперболические функции* ($y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$). Так как они (и обратные к ним) могут быть выражены через перечисленные выше основные элементарные функции, то указанные функции также относятся к элементарным.

Гиперболические функции обладают свойствами, во многом аналогичными свойствам тригонометрических функций. Подобно тому как тригонометрические синус и косинус являются координатами точки на координатной окружности, гиперболические синус и косинус являются координатами точки на гиперболе и поэтому дают её параметрическое представление

$$x^2 - y^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Гиперболическим синусом действительного числа x называется функция

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

нечётная и монотонно возрастающая на всей числовой прямой. Её график проходит через начало координат, причём касательная в этой точке имеет угол наклона 45°.

Гиперболическим косинусом называется чётная положительная функция

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

определённая на всей числовой прямой. Её график имеет минимум, равный единице, при $x = 0$.

Однородная цепь, свободно подвешенная за свои концы, приобретает форму графика функции $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ $(a > 0)$, в связи с чем график гиперболического косинуса иногда называют цепной линией. Это обстоятельство используется при проектировании арок, поскольку форма арки в виде перевёрнутой цепной линии наиболее удачно распределяет нагрузку.

Гиперболический тангенс: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. Это нечётная, монотонно возрастающая функция. Её график проходит через начало координат под углом 45° и имеет две горизонтальные асимптоты $y = -1$ (при $x \to -\infty$) и $y = 1$ (при $x \to +\infty$).

Гиперболический котангенс: $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$. Это нечётная функция, определённая на всей числовой прямой, за исключением точки $x = 0$. График состоит из двух ветвей и имеет три асимптоты: вертикальную, совпадающую с осью ординат, и две горизонтальные $y = \pm 1$.

Гиперболические формулы имеют свои тригонометрические аналоги и доказываются во многом аналогично.$^{(*)}$[1]

1. Основное гиперболическое тождество:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

а также $\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x = e^{\pm x}$.

2. Формулы $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$, $\operatorname{cth}^2 x - 1 = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ $(x \neq 0)$.

3. Формулы сложения:

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{sh} x,$$
$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}\,,\ \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x}.$$

4. Формулы двойного аргумента:

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x,$$
$$\operatorname{th} 2x = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x},\ \operatorname{cth} 2x = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x}{2},$$
$$\operatorname{ch} 2x \pm \operatorname{sh} 2x = (\operatorname{sh} x \pm \operatorname{ch} x)^2.$$

5. Формулы универсальной подстановки:

$$\operatorname{sh} 2x = \frac{2\operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th}^2 x},\ \operatorname{ch} 2x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x}.$$

[1] Материал, помеченный символом $^{(*)}$, относится к дополнительному, который следует принять к сведению.

6. Формулы понижения степени:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \ \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$

7. Формулы $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{1 + \operatorname{ch} 2x} = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\operatorname{sh} 2x}$.

8. Формулы суммы и разности синусов (косинусов):

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}.$$

9. Формулы преобразования произведений синусов и косинусов в суммы (разности):

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{\operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{ch}(x - y)}{2},$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{sh}(x + y) + \operatorname{sh}(x - y)}{2},$$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{\operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{ch}(x - y)}{2}.$$

10. Чётность (нечётность) гиперболических функций:

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \ \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x, \ \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x;$$

11. При всех $x \in \mathbb{R}$ имеем неравенства:

$$0 \le \operatorname{ch} x - 1 \le |\operatorname{sh} x| < \operatorname{ch} x; \quad |x| \le |\operatorname{sh} x|, \quad |\operatorname{th} x| < 1.$$

Примеры элементарных функций: линейная функция $y = ax+b$ (график – прямая линия), квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, график – парабола), дробно-линейная функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (общий случай: $c \neq 0, ad \neq bc$, график – гипербола), модуль числа $y = |x|$, кубический многочлен $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (график – кубическая парабола), квадратный ($y = \sqrt{x}$) и кубический корни ($y = \sqrt[3]{x}$), показательно-степенная функция $y = f(x)^{g(x)}$ ($f(x) > 0$), где $f(x), g(x)$ – любые элементарные функции и т.п.

Примеры неэлементарных функций.$^{(*)}$ Помимо элементарных, выделяют *специальные функции* — встречающиеся в различных приложениях математики (чаще всего — в различных задачах математической физики) функции, которые не выражаются через элементарные функции. Специальные функции обычно представляются в виде рядов и интегралов. Например, гамма-функция Эйлера $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ обобщает понятие факториала с натурального n на нецелые значения $x > 0$. Дзета-функция Римана $\zeta(s) = \dfrac{1}{1^s} + \dfrac{1}{2^s} + \dfrac{1}{3^s} + \ldots$ задаётся рядом и др. Приведём другие известные примеры неэлементарных функций.

1. Функция «сигнум» (знак числа):

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ \ \ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

2. Функция Дирихле́:[1]

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

3. Функции $y = [x]$ (антье́, или целая часть действительного числа x), $y = \{x\}$ (манти́сса, или дробная часть числа x).[2]

4. Если функция является кусочно-заданной, т.е. на разных участках своей области определения задаётся аналитически по-разному, то её, вообще говоря, следует отнести к неэлементарным функциям, например:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 7, & \text{если } x > 1, \\ \ln(|x| + 1), & \text{если } x \leq 1. \end{cases}$$

Неэлементарные функции могут быть также заданы с помощью таблиц, графиков, диаграмм, пределов и проч.

2.2 Предел функции одной переменной

«Из дома реальности легко забрести в лес математики,
но лишь немногие способны вернуться обратно».

Гуго Штейнхаус (1887–1972), польский учёный,
один из основоположников Львовской математической школы,
популяризатор науки и афорист.

Понятие предела функции. Виды пределов. Предел функции, так же как и предел последовательности, относится к основным понятиям математического анализа. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}$ и a – предельная точка этого множества (т.е. в любой, сколь угодно малой окрестности точки a находится хотя бы одна точка из X, отличная от a).[3] Сформулируем два эквивалентных между собой определения (конечного) предельного значения функции в (конечной) точке.

[1] *Иоганн Петер Дирихле́* (1805–1859) – немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел.

[2] Целой частью числа $x \in \mathbb{R}$ называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Дробной частью x называется, по определению, разность: $\{x\} = x - [x]$.

[3] Сама точка a может как принадлежать, так и не принадлежать X.

Опр. 1' (*предела функции в точке* по Коши[1], или на языке «$\varepsilon-\delta$»). Число b называется *пределом* (*предельным значением*) функции $y = f(x)$ в точке a (или при x, стремящемся к a), если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Другое определение опирается на понятие сходящейся последовательности.

Опр. 1" (*предела функции в точке* по Гейне[2], или на языке последовательностей). Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любой последовательности значений аргумента x_n, сходящейся к a и состоящей из чисел, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к числу b.

Для обозначения введённого предела функции используется запись вида:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \text{или} \quad f(x) \to b \ \text{ при } \ x \to a.$$

Заметим, что условие $0 < |x-a| < \delta$ означает проколотую δ-окрестность точки a, а условие $|f(x)-b| < \varepsilon$, соответственно, ε-окрестность точки b. Иными словами, число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только x попало в проколотую δ-окрестность точки a, то соответствующее значение функции оказалось в ε-окрестности точки b.

Теорема (*о единственности предела*). Если функция имеет в некоторой точке предел, то он единственный. (То есть функция не может иметь более одного предельного значения в заданной точке).

Графически существование предела у функции в заданной точке означает, что по мере приближения вдоль оси Ox значения x к a (с любой стороны, не важно: справа или слева!), график функции приближается к точке с координатами (a, b). (При этом в самой точке $x = a$ функция может быть и не определена).

Примеры: $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.

Другие виды пределов. Приведённые выше определения предела относятся к простейшему случаю, когда a и b принимают конечные

[1] *Коши Огюстен Луи* (1789–1857) – французский математик.
[2] *Гейне Генрих Эдуард* (1821–1881) – немецкий математик.

значения. Однако понятие предела можно распространить и на случаи, когда одно или даже оба предельных значения аргумента или функции (a или b) бесконечны, т.е. равны $+\infty$, $-\infty$, или ∞ без указания знака.

Сформулируем некоторые из этих определений.

Опр. 2' (*конечного предела функции при $x \to \infty$ по Коши*). Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число E такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $|x| > E$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Опр. 2" (*конечного предела функции при $x \to \infty$ по Гейне*). Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента x_n соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к числу b. Обозначение:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b, \quad \text{или} \quad f(x) \to b \ \text{ при } \ x \to \infty.$$

Например, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (2-й замечательный предел).

Опр. 3' (*бесконечного предела функции при $x \to a$* по Коши). Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке a *бесконечный предел* (∞), если для любого положительного числа E найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > E$.

Опр. 3" (*бесконечного предела функции при $x \to a$ по Гейне*). Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке a *бесконечный предел* (∞), если для любой последовательности значений аргумента x_n, сходящейся к a и состоящей из чисел, отличных от a, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ является бесконечно большой. Обозначение:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \quad \text{или} \quad f(x) \to \infty \ \text{ при } \ x \to a.$$

В частности, $f(x_n)$ может стремиться как к положительной, так и к отрицательной бесконечности. Это приводит ещё к двум определениям.

Опр. 3"' (*бесконечного положительного предела функции при $x \to a$* по Коши). Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке a *предел,* *равный* $+\infty$, если для любого $E > 0$ найдётся отвечающее ему $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $f(x) > E$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \quad \text{или} \quad f(x) \to +\infty \ \text{при} \ x \to a.$$

Опр. 3"" (*бесконечного отрицательного предела функции при $x \to a$* по Коши). Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке a *предел, равный* $-\infty$, если для любого $E > 0$ найдётся отвечающее ему $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $f(x) < -E$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \quad \text{или} \quad f(x) \to -\infty \ \text{при} \ x \to a.$$

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \left(x - \frac{1}{x^4}\right) = -\infty$.

Односторонние пределы. Необходимое и достаточное условие существования предела в точке. Помимо обычного (двустороннего) предела функции в точке a (где a может принимать в том числе бесконечные значения $\pm\infty$ или ∞) существуют так называемые *односторонние* пределы, когда переменная x стремится к своему пределу a только с одной стороны: справа или, наоборот, слева. Приведём соответствующие определения.[1]

Опр. 4' (*односторонних пределов функции по Коши*). Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a *справа* (*слева*), если $\forall \varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию[2] $a < x < a + \delta$ (соответственно, $a - \delta < x < a$), справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b, \quad \text{или} \quad f(x) \to b \ \text{при} \ x \to a + 0.$$

(соответственно,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b, \quad \text{или} \quad f(x) \to b \ \text{при} \ x \to a - 0).$$

Опр. 4" (*односторонних пределов функции в точке по Гейне*). Число b называется *правым пределом* (соответственно, *левым пределом*)

[1] Мы сформулируем определения на языке «$\varepsilon - \delta$». На языке числовых последовательностей вы можете сформулировать аналогичные определения самостоятельно.

[2] То есть попавших в правую проколотую полуокрестность точки a.

функции $y = f(x)$ в точке a, если для любой последовательности значений аргумента x_n, сходящейся к a и состоящей из чисел, бóльших a (соответственно, мéньших a), соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к числу b.

Правый (левый) пределы в точке a обозначаются также $f(a+0)$ и $f(a-0)$, а предел при $x \to +\infty$ как $f(+\infty)$.

Например, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$, но $\lim\limits_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to -0} \operatorname{sgn} x = -1$, $\lim\limits_{x\to +0} \operatorname{sgn} x = 1$.

Теорема (*необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке*). Предел[1] функции в заданной точке существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют оба односторонних предела и они равны.

Дополнительно.$^{(*)}$ Существуют и другие необходимые и достаточные условия (их ещё называют ***критериями***) существования предельного значения функции в точке. К наиболее известным относится так называемый критерий Коши.

Теорема (*Критерий Коши существования предела функции в точке*). Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела в точке a конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашлось отвечающее ему положительное число δ такое, что для любых двух значений x' и x'', удовлетворяющим условиям $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$, выполнялось неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Случаи, когда предел функции не существует. Предел существует не у всех функций и не во всех точках.

Покажем, например, что функция Дирихле не имеет предела ни в одной точке, несмотря на то, что определена на всей числовой прямой. В самом деле, воспользуемся определением предела по Гейне. Пусть a – произвольное действительное число. Рассмотрим последовательность $x'_n \to a$ и состоящую только из рациональных чисел. Тогда $f(x'_n) = 1$ и, следовательно, $f(x'_n) \to 1$. Теперь возьмём любую последовательность $x''_n \to a$, состоящую только из иррациональных чисел. Но тогда $f(x''_n) = 0$ и, следовательно, $f(x''_n) \to 0$. Получили противоречие с единственностью предела, что доказывает, что он не существует.

Другой пример: $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin x$ также не существует.

Для доказательства достаточно показать, что значение предела зависит от того, каким способом x стремится к $+\infty$. Действительно, возьмём $x = x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in \mathbb{N})$, тогда получим, что предел равен 1. Но если устремить x в бесконечность по точкам $x_n = -\frac{\pi}{2} + \pi n$

[1] Речь идёт о конечном пределе.

($n \in \mathbb{N}$), то получим другое значение (-1). Это противоречит единственности предела. Значит, данный предел не существует.

Распространённая причина, по которой предел у функции в заданной точке не существует – существование, но неравенство между собой в этой точке односторонних пределов.

Например, поскольку $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{sgn} x = -1$, а $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{sgn} x = 1$, то $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ не существует.

Арифметические операции над функциями, имеющими предельные значения. Пусть две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ заданы на одном и том же множестве X и имеют в точке a пределы, соответственно равные b и c. Тогда функции $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ имеют в точке a пределы, соответственно равные $b+c$, $b-c$, $b\cdot c$ и b/c (в случае частного нужно дополнительно требовать, чтобы c было отлично от нуля), т.е.

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)/ \lim_{x\to a} g(x).$$

Предельный переход в неравенствах для функций. Пусть две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ заданы в окрестности точки a (точка a либо является числом, либо может быть равна $\pm\infty$) и имеют в самой точке a пределы, соответственно, равные b и c. Пусть, кроме того, при всех x из указанной окрестности справедливо неравенство $f(x) \leq g(x)$. Тогда аналогичное неравенство выполняется и в пределе: $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$, т.е. $b \leq c$. При этом если в (проколотой) окрестности точки a верно строгое неравенство $f(x) < g(x)$, то в пределе неравенство все равно в общем случае останется нестрогим $b \leq c$.

Пример: при всех $x > 1$ выполняется неравенство $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^2}$. Поэтому для любого конечного $a > 1$ верен строгий предельный переход $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} > \frac{1}{a^2} = \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x^2}$. Однако в случае, когда $a = +\infty$, получим равенство пределов $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции. По аналогии с числовыми последовательностями вводятся понятия бесконечно малых и бесконечно больших в заданной точке функций.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой в точке a*, если предел этой функции в точке a существует и равен нулю.

Например, функция $\cos x$ является бесконечно малой в точке $x = \pi/2$, поскольку $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$. Функция $y = 1/x$ является бесконечно малой при $x \to \infty$.

Заметим, что если функция $y = f(x)$ имеет в точке a конечный предел, равный b, то функция $\alpha(x) = f(x) - b$ является бесконечно малой в точке a. Наоборот, любую функцию $y = f(x)$, имеющую в точке a конечный предел b, можно в малой окрестности точки a представить в виде $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – некоторая бесконечно малая в точке a функция.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно большой в точке* a, если предел этой функции в точке a существует и равен бесконечности (с любым знаком), т.е.

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \infty.$$

Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ является бесконечно большой в точке $x = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty$. Функция $y = 1/x$ является бесконечно большой в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} 1/x = \infty$.

Свойства бесконечно малых функций.$^{(*)}$

1. Сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

3. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

4. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая в точке a функция, причём существует проколотая окрестность этой точки, где $\alpha(x)$ не обращается в нуль. Тогда $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая в точке a функция. Наоборот, если $\alpha(x)$ – бесконечно большая в точке a функция, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно малая в точке a функция.

Сравнение бесконечно малых (бесконечно больших) функций.$^{(*)}$ Две бесконечно малые (бесконечно большие) в заданной точке функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ можно сравнивать по скорости их стремления к нулю (к бесконечности) при $x \to a$. Обычно для этого рассматривают предел их отношения в данной точке.

Пусть, ради определённости, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две бесконечно малые в точке a функции.

Опр. 1. Говорят, что $\alpha(x)$ является в точке a бесконечно малой *более высокого порядка*, чем $\beta(x)$ (имеет в точке a более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$), если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0.$$

В этом случае можно сказать, что $\alpha(x)$ есть *о-малое* от $\beta(x)$, что обозначается $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Например, при $x\to 0$ имеем $x^3=o(x)$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$.

Опр. 2. Говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются в точке a бесконечно малыми *одного порядка* (имеют в точке a одинаковый порядок малости), если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C,$$

где C – конечное число, отличное от нуля. В этом случае можно сказать, что $\alpha(x)$ есть O-большое[1] от $\beta(x)$ (или, что то же самое, $\beta(x)$ есть O-большое от $\alpha(x)$), что обозначается $\alpha(x)=O(\beta(x))$, или $\beta(x)=O(\alpha(x))$. Например, при $x\to 0$ имеем: $\sin^2 x=O(3x^2)$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

Опр. 3. Говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются в точке a *эквивалентными* бесконечно малыми, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Это обозначают: $\alpha(x)\sim\beta(x)$. Например, при $x\to 0$ имеем: $\sin x\sim x$, $\operatorname{tg} x\sim x$, $\arcsin x\sim x$ и т.п.

Один из приёмов вычисления пределов функций основан на замене бесконечно малой (бесконечно большой) функции её приближением в окрестности точки a в виде более простой, но эквивалентной степенной функции.

Для бесконечно больших функций существует аналогичное сравнение, при этом слова «бесконечно малые одного порядка малости» следует заменить на «бесконечно большие одного порядка роста».

Замечательные и другие известные пределы. Существует техника вычисления пределов, основанная на разнообразных приёмах и способах, которые обычно изучаются на семинарских занятиях.

[1] Иногда вместо O используют обозначение O^*.

За недостатком времени, приведём здесь лишь некоторые из наиболее известных пределов функций:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{(1-й замечательный предел);}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \quad \text{(2-й замечательный предел);}$$

Дополнительно$^{(*)}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0,\, a\neq 1);$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log_a x}{x^{\varepsilon}}=0 \quad (\varepsilon>0,\, a>1);$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{\varepsilon}}{a^{x}}=0 \quad (\varepsilon>0,\, a>1).$$

Раскрытие неопределённостей. Встречаются ситуации, когда при вычислении предела, например вида $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, обе функции $f(x)$ и $g(x)$ являются в точке a бесконечно малыми (или, соответственно, бесконечно большими). В этом случае говорят, что имеют дело с *неопределённостью* вида $\frac{0}{0}$ (или, соответственно, $\frac{\infty}{\infty}$). Так же, как в случае с последовательностями, вычислить предел в этой ситуации называется «раскрыть неопределённость».

Пример 1. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x+1}{5x^3-3x+2}$.

Решение. Заметим, что имеется неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, поскольку при $x\to+\infty$ и числитель, и знаменатель дроби стремятся к бесконечностям. Найдём главный член в числителе (это $7x$), в знаменателе (это $5x^3$, он быстрее других слагаемых в знаменателе стремится к бесконечности) и вынесем за скобку в числителе и знаменателе, соответственно, x и x^3. После этого сократим дробь на общий множитель x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x+1}{5x^3-3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(7+\frac{1}{x})}{x^3(5-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7+\frac{1}{x}}{x^2(5-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3})}.$$

В результате сокращения неопределённость исчезает. Устремив $x\to+\infty$, видим, что теперь числитель стремится к 7, а знаменатель, по-прежнему, к ∞. Предел легко вычисляется, он, очевидно, равен 0.

Бывают и другие виды неопределённостей, например, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, ∞^0. Для раскрытия этих неопределенностей (то есть для вычисления соответствующих пределов в этих случаях) существуют специальные приёмы.

Пример 2. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^x$.

Решение. При $x \to +\infty$ под знаком предела основание степени $\left(1+\dfrac{1}{5x}\right) \to 1$, при этом показатель степени $x \to +\infty$, что означает неопределённость вида 1^∞. Раскроем её, сведя данный предел ко 2-му замечательному пределу:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5x}\right)^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{e},$$

поскольку выражение $\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{5x} \to e$.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение. Перепишем предел, сведя его к 1-му замечательному пределу:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Так как $\frac{1}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$, то предел равен 1.

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

Решение. Если устремить $x \to 1$, то обнаруживается, что числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю (неопределенность вида $\frac{0}{0}$). Чтобы избавиться от неопределённости, разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель $(x-1)$, который стремится к нулю и является причиной неопределённости:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)} = \lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение. Здесь нет неопределённости. Хотя $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ не существует, умножение синуса на бесконечно малую функцию $x \to 0$ приводит к тому, что данный предел существует и равен нулю как произведение бесконечно малой функции x на ограниченную функцию $\sin\frac{1}{x}$. Ограниченность синуса следует из неравенства $|\sin\frac{1}{x}| \leq 1$, верного при всех $x \neq 0$.

2.3 Непрерывность функции одной переменной

«Законы математики, имеющие какое-либо отношение к реальному миру, ненадежны; а надежные математические законы не имеют отношения к реальному миру».

А. Эйнштейн (1879–1955), физик-теоретик, один из основателей современной теоретической физики, лауреат Нобелевской премии по физике 1921 года.

Понятие непрерывности функции в точке и на множестве. Непрерывность – одно из важнейших свойств функций. Например, все элементарные функции непрерывны на своей области определения. Интуитивно это понятно: функция непрерывна, если её график на имеет разрывов, представляя собой одну сплошную линию. Однако это, конечно нельзя признать строгим математическим определением. Сформулируем это понятие чётко, используя средства математического анализа.

Опр. 1 (*непрерывности в точке*). Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X, точка a принадлежит X, причём является его предельной точкой. Тогда функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если эта функция имеет в точке a предел и этот предел равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Условие непрерывности функции в точке можно интерпретировать как возможность перейти к пределу под знаком функции:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x).$$

Сформулируем это определение ещё дважды, раскрыв понятие предела вначале по Коши́, а затем по Ге́йне.

Опр. 1' (*непрерывности в точке по Коши*). Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если для любого положительно числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ (т.е. из δ-окрестности точки a), выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Опр. 1" (*непрерывности в точке по Гейне*). Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если для любой сходящейся к a последовательности x_n значений её аргумента соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к значению $f(a)$.

Далее, функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $X \subseteq \mathbb{R}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Тот факт, что функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве X, обозначают $f(x) \in C(X)$.

Дополнительно.$^{(*)}$ По аналогии с пределом, для функций вводится понятие односторонней непрерывности в точке: только справа или слева. Так, функция $f(x)$ называется *непрерывной справа (слева)* в точке a, если эта функция имеет в точке a правый (левый) предел и этот предел равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \quad \text{или} \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a).$$

Тогда непрерывность функции на отрезке может быть определена следующим образом: функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b), а также непрерывна в точке a справа, а в точке b – слева.

Теорема (*необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке*). Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке как слева, так и справа, т.е. существуют оба односторонних предела и они равны значению функции в точке a:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a-0} f(x).$$

Арифметические операции над непрерывными функциями. Из возможности выполнения арифметических операций над функциями, имеющими предел, следуют аналогичные возможности для непрерывных функций.

Теорема (*арифметические операции над непрерывными функциями*). Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки a и обе непрерывны в этой точке. Тогда функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ непрерывны в точке a (в случае частного нужно дополнительно потребовать, чтобы $g(a)$ было отлично от нуля):

$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = f(a) \pm g(a),$$
$$\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = f(a) \cdot g(a),$$
$$\lim_{x \to a}(f(x)/g(x)) = f(a)/g(a).$$

Понятие сложной функции и её непрерывность. Предположим, что на некотором множестве $X \subseteq \mathbb{R}$ задана функция $g(x)$, и множество G является множеством её значений. Тогда, если на множестве G задана функция $y = f(g)$, то говорят, что на множестве X задана *сложная функция* $y = f(g(x))$, которую иначе называют «суперпозицией» функций f и g. При этом переменную g иногда называют промежуточным аргументом.

Теорема (*о непрерывности сложной функции*). Если функция $g(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(g)$ непрерывна в соответствующей точке $g_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ как функция переменной x непрерывна в точке $x = x_0$.

Например, функция $y = \sqrt[3]{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$, является сложной функцией, так как её можно представить в виде $y = f(g(x))$, где $f(g) = \sqrt[3]{g}$, а $g(x) = \sin x$. В силу непрерывности обеих функций $f(g)$ и $g(x)$, данная функция также является непрерывной.

Основные свойства непрерывных функций. Первые два свойства касаются локального поведения функции в окрестности точки непрерывности.[1]

1. *Локальная ограниченность функции, непрерывной в заданной точке.* Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a и непрерывна в этой точке, то найдётся такое положительное число δ, что эта функция ограничена в δ-окрестности точки a.

2. *Об устойчивости знака непрерывной в данной точке функции.* Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, непрерывна в этой точке и её значение $f(a)$ положительно (соответственно, отрицательно), то найдётся такое положительное число δ, что функция $f(x)$ положительна (соответственно, отрицательна) всюду в δ-окрестности точки a.

Следующие свойства иногда называют глобальными в силу того, что они присущи функции на целом множестве (например, на интервале или сегменте).

3. *1-я теорема Больца́но-Коши́ (о прохождении непрерывной на сегменте функции через нуль при разных знаках её значений на концах сегмента).* Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и её значения на концах этого сегмента $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, то внутри сегмента $[a, b]$ найдётся такая точка c, значение функции в которой равно нулю.

4. *2-я теорема Больца́но-Коши́ (о прохождении функции, непрерывной на сегменте, через любое промежуточное значение).* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, причём $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Тогда для любого числа γ, заключённого между α и β, на сегменте $[a, b]$ найдётся точка c такая, что $f(c) = \gamma$.

5. *1-я теорема Вейерштра́сса.* Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте.

6. *2-я теорема Вейерштра́сса.* Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она достигает на этом сегменте своих точной верхней

[1] Термин «локальное» означает, что свойство выполняется, вообще говоря, лишь в малой окрестности рассматриваемой точки.

и нижней граней, т.е. найдутся такие $x', x'' \in [a, b]$, что

$$f(x') = \sup_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(x'') = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Классификация точек разрыва. Точки, в которых нарушается условие непрерывности, называются *точками разрыва* функции.

Выделяют следующие виды точек разрыва.

1. *Точки разрыва 1-го рода, или «скачо́к»*. Если в точке a существуют конечные неравные между собой односторонние пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$, то точка a называется *точкой разрыва 1-го рода.*

Например, функция $y = \operatorname{sgn} x$ имеет в точке $x = 0$ разрыв 1-го рода.

2. *Точки разрыва 2-го рода.* Если в точке a хотя бы один из односторонних пределов $f(a-0)$ или $f(a+0)$ не существует или равен бесконечности, то точка a называется *точкой разрыва 2-го рода.*

Например, для функции $y = \dfrac{1}{x}$ точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода, так как $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода и для функции $y = \sin \dfrac{1}{x}$, поскольку $\lim\limits_{x \to +0} \sin \dfrac{1}{x}$ не существует.

3. *Точки устранимого разрыва.* Если в точке a функция $f(x)$ имеет предел, но он или не совпадает со значением функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, или же функция $f(x)$ не определена в точке a, то точка a называется точкой *устранимого разрыва.* В этом случае функцию можно доопределить до непрерывной, положив в точке a её значение равным пределу в этой точке.

Например, функция $y(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет устранимый разрыв в точке $x = 0$.

На следующей лекции для функций одной действительной переменной будет введено понятие производной и дифференциала, и показано, как дифференцируемость помогает исследовать различные свойства функций.

3 ЛЕКЦИЯ: Функции одного действительного переменного: дифференцируемость. Исследование функций при помощи производной

«Первое условие, которое надлежит выполнять в математике,
– это быть точным, второе – быть ясным
и, насколько можно, простым».
Л. Карно

Краткое содержание.

I. Понятие производной в точке и на множестве. Односторонние производные. Равенство односторонних производных как необходимое и достаточное условие существования производной в точке. Физический и геометрический смыслы. Касательная и нормаль к графику. Таблица производных элементарных функций (включая производные обратных тригонометрических и гиперболических функций). Арифметические операции над функциями, имеющими производные. Производная сложной функции. Производные показательно-степенных функций.

II. Дифференциал. Дифференцируемость в точке и на множестве. Эквивалентность дифференцируемости существованию конечной производной в точке. Связь непрерывности и дифференцируемости. Правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Понятие производных и дифференциалов высших порядков. Формула Лейбница. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Основные теоремы о дифференцируемых функциях (Ферма́, Ро́лля, Лагра́нжа и др.). Формула Те́йлора. Разложения основных элементарных функций по формуле Макло́рена. Аси́мптоты и их классификация.

III. Схема исследования функций и построения графиков: нахождение области определения и множества значений функции, точек пересечения графика с осями координат, определение промежутков знакопостоянства, исследование на чётность/нечётность (наличие осей и центров симметрии), периодичность, непрерывность и дифференцируемость, монотонность, наличие локальных и краевых экстремумов, аси́мптот, определение участков различной выпуклости и точек перегиба и проч.

3.1 Понятие производной

«В математике ум исключительно занят собственными формами познавания – временем и пространством, следовательно, подобен кошке, играющей собственным хвостом».

А. Шопенгауэр

Производная в точке и на множестве. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a, b) и точка $x_0 \in (a, b)$. Дадим *приращение* Δx *аргументу* в точке x_0 и получим новую точку $x_0 + \Delta x$. Приращение аргумента Δx будем считать достаточно малым, положительным или отрицательным, так чтобы $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Назовём *приращением функции* $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Рассмотрим предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если этот предел существует, то его называют *производной* функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ и обозначают:

$$f'(x_0),\ f'(x)\Big|_{x=x_0},\ y'(x_0),\ \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0},\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}.$$

Обозначим $x = x_0 + \Delta x$, тогда $\Delta x = x - x_0$ и получаем эквивалентное определение производной:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Бывает, что функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого множества X. Тогда производная $f'(x)$ будет представлять собой функцию той же переменной x, определённую на множестве X. Например, функция $y = \sin x$ имеет производную на всём множестве действительных чисел, и эта производная представляет собой функцию $y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Односторо́нние производные. *Правой* (*левой*) *производной* функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется, соответственно, число, равное правому (левому) пределу

$$f'_{+}(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right).$$

Теорема 1 (*необходимое и достаточное условие существования производной в точке*). Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда её односторонние производные в этой точке существуют и равны: $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ $(= f'(x_0))$.

Покажем, например, что функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x_0 = 0$. Вычислим её левую и правую производные в этой точке:

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Очевидно, что в данном случае $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, следовательно, $f'(0)$ не существует.

Физический и геометрический смысл производной. Касательная и нормаль. Физический смысл производной состоит в том, что она характеризует скорость изменения функции в точке. Более точно, пусть функция $f(x)$ описывает закон движения материальной точки вдоль прямой линии (т.е. зависимость от x пути y, пройденного точкой от начала отсчёта за время x). Тогда разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ определяет среднюю скорость точки за промежуток времени от x до $x+\Delta x$. В таком случае производная $f'(x)$ как предел разностного отношения при $\Delta x \to 0$, определяет *мгновенную скорость* точки в момент времени x.

Обратимся к геометрическому смыслу. Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Отметим на нём точки $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. Прямая M_0M называется *секущей* графика функции $f(x)$. Угол между секущей M_0M и осью Ox зависит от Δx, обозначим его как $\varphi(\Delta x)$.

Касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M при стремлении точки M к точке M_0 (то есть при стремлении приращения Δx к нулю). Угол $\varphi(\Delta x)$ при этом стремится к некоторому углу φ_0, который называется *углом наклона касательной* к оси Ox.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Нормалью к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 называется прямая, проходящая через точку касания M_0 перпендикулярно касательной.

Так как угловые коэффициенты двух перпендикулярных прямых на плоскости $y = k_1x+b_1$ и $y = k_2x+b_2$ связаны соотношением $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, то *уравнение нормали* к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид: $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Теорема 2 (*связь между существованием производной и наличием касательной в точке*). Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ существует касательная к графику $f(x)$, причём угловой коэффициент этой касательной (т.е. тангенс угла φ_0 наклона её к положительному направлению оси Ox) равен производной $f'(x_0)$: $\operatorname{tg}\varphi_0 = f'(x_0)$.

Обратное также верно: если график функции $y = f(x)$ имеет касательную в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, то в соответствующей точке x_0 функция имеет производную (вертикальной касательной отвечает бесконечная производная).

Таблица производных элементарных функций.

1. Степенна́я функция: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

2. Показательная функция: $(a^x)' = a^x \ln a$ $(0 < a \neq 1)$, в частности, $(e^x)' = e^x$.

3. Логарифмическая функция: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(0 < a \neq 1,\ x > 0)$, в частности, $(\ln x)' = 1/x$.

Тригонометрические функции:

4. $(\sin x)' = \cos x,\ \ x \in \mathbb{R}$;

5. $(\cos x)' = -\sin x,\ \ x \in \mathbb{R}$;

6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(\cos x \neq 0)$;

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(\sin x \neq 0)$.

Обратные тригонометрические функции:

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ x \in (-1, 1)$;

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \ x \in (-1, 1)$;

10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2},\ \ x \in \mathbb{R}$;

11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2},\ \ x \in \mathbb{R}$.

Гиперболические функции:

12. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\ \ x \in \mathbb{R}$;
13. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\ \ x \in \mathbb{R}$;
14. $(\operatorname{th} x)' = 1/\operatorname{ch}^2 x,\ \ x \in \mathbb{R}$;
15. $(\operatorname{cth} x)' = -1/\operatorname{sh}^2 x,\ \ x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$.

Арифметические операции над функциями, имеющими производные. Если функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют производные в точке x, то их сумма, разность, произведение и частное также имеют в точке x производные, причём

$$(u \pm v)' = u' \pm v',\ \ (uv)' = u'v + uv',\ \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ \ (v \neq 0).$$

Производная сложной функции. Если функция $g(x)$ имеет производную g' в точке x, а функция $f(g)$ имеет производную f' в соответствующей точке g, то сложная функция[1] $f(g(x))$ имеет производную в точке x, причём

$$(f(g(x)))'_x = f'_g(g) \cdot g'_x(x), \text{ или просто } (f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x).$$

Например, пусть дана функция $y = \sin^3 x$. Покажем, что это сложная функция. В самом деле, её можно представить в виде $y = f(g) = g^3$, где $g(x) = \sin x$. Тогда $(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x) = 3g^2 \cdot \cos x$. Окончательно получаем: $(\sin^3 x)' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$.

Производные показательно-степенны́х функций. Пусть требуется найти производную функции $y = u(x)^{v(x)}$ $(u(x) > 0)$ в предположении, что функции $u(x), v(x)$ имеют производные в каждой точке x некоторого множества X. Обратимся к приёму, состоящему в предварительном логарифмировании функции. А именно, прологарифмируем это равенство по основанию e:

$$\ln y = \ln(u^v), \quad \text{или} \quad \ln y = v \ln u.$$

Поскольку функции слева и справа от знака равенства равны, то их производные также равны:

$$(\ln y)' = (v \ln u)' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u},$$

откуда находим искомую производную

$$y' = y \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right) = u^v \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right).$$

[1]Сложную функцию, или композицию функций, также обозначают $(f \circ g)(x)$.

Например, пусть надо найти производную функции $y = x^x$ при $x > 0$. Прологарифмировав это равенство, получим: $\ln y = x \ln x$. Возьмём производную: $y'/y = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$. Упрощая и умножая обе части равенства на y, окончательно получим: $y' = x^x(\ln x + 1)$.

3.2 Дифференцируемость в точке и на множестве. Дифференциал

Дифференцируемость является одним из фундаментальных понятий в математике и имеет значительное число приложений как в самой математике, так и в других науках.

Понятие дифференцируемости. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой двусторонней окрестности точки x_0 и непрерывна в самой точке x_0. Тогда $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если её приращение $\Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в этой точке при достаточно малых Δx ($\Delta x \to 0$) может быть представлено в виде:

$$\Delta y(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

где $A(x_0)$ – некоторая величина, зависящая от x_0, но не зависящая от Δx, $o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем Δx (при $\Delta x \to 0$). Слагаемое $A(x_0)\Delta x$ является здесь главной (в сравнении с $o(\Delta x)$) частью приращения функции, причём эта главная часть линейна по Δx.

Теорема 1 (*связь между дифференцируемостью в точке и существованием в этой точке конечной производной*). Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную $f'(x_0)$. При этом $A(x_0)$ в определении дифференцируемости равна производной $f'(x_0)$.

Операцию нахождения производной будем называть *дифференцированием* функции.

Теорема 2 (*связь между дифференцируемостью и непрерывностью*). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Обратное, вообще говоря, неверно. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = 0$.

Дифференциа́л. *Дифференциа́лом 1-го порядка*, или просто дифференциалом, функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению Δx, называется выражение $f'(x_0)\Delta x$, обозначаемое $dy(x_0)$. То есть дифференциал – это главная (линейная относительно Δx) часть приращения функции.

Свойства и геометрический смысл дифференциала.

1) При фиксированном x_0 дифференциал dy является линейной функцией от аргумента Δx (если $f'(x_0)=0$, то $dy\equiv 0$).

2) Вообще говоря, $dy\neq\Delta y$. Действительно, рассмотрим график функции $y=f(x)$. Отметим на нём точки $M_0(x_0, f(x_0))$ и $M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. Обозначим также через H и P точки на координатной плоскости с координатами $H(x_0+\Delta x, f(x_0))$; $P(x_0+\Delta x, f'(x_0)\Delta x+f(x_0))$. Тогда точки M, P, H лежат на одной прямой; $M_0H\perp MH$. Получаем, что $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=MH$; $dy=f'(x_0)\Delta x=PH$. Итак, $dy\neq\Delta y$ в общем случае; кроме того, мы выяснили геометрический смысл дифференциала: дифференциал dy — это ордината приращения касательной, соответствующего приращению аргумента Δx.

Как видно и из геометрического смысла дифференциала, если $y=f(x)$ – линейная функция, то её дифференциал совпадает с приращением функции: $dy=\Delta y$.

3) Если x — независимая переменная, то $dx=x'\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x$, поэтому дифференциал обычно записывают в виде:[1]

$$dy(x)=f'(x)dx.$$

Если разделить обе части последнего равенства на dx, то получим , что производная есть отношение двух дифференциалов:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

Это так называемая дифференциальная форма записи производной.

Примеры вычисления дифференциалов: $d(\sin x)=\cos x dx$, $d(2x-5)=(2x-5)'dx=2dx$.

4) Если функции $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то их сумма, разность, произведение и частное также дифференцируемы в точке x (частное при условии $v(x)\neq 0$), причём

$$d(u\pm v)=du\pm dv,\ \ d(uv)=vdu+udv,\ \ d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}\ \ (v\neq 0).$$

5) **Инвариантность (постоянство) формы 1-го дифференциала.** Покажем, что формула для 1-го дифференциала $dy(x)=f'(x)dx$ сохраняет такой же вид и в случае,

[1] Это – основная формула для вычисления дифференциалов 1-го порядка.

когда x не является независимой переменной, а является дифференцируемой функцией некоторой другой переменной: $x = x(t)$, $t \in \mathbb{T}$. Тогда $f(x)$ будет сложной функцией. Обозначив $f(x(t)) = F(t)$, получим

$$d(f(x(t))) = dF(t) = F'(t)dt = (f'_x \cdot x'_t)dt = f'_x \cdot (x'_t dt) = f'_x \cdot d(x(t)) = f'(x)dx.$$

Для дифференциалов более высоких порядков, которые будут введены позже, свойство инвариантности уже не выполняется.

Теперь, когда введено понятие производной, рассмотрим один из удобных способов раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Правила Лопитáля.[1] Напомним, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой при $x \to a$ неопределённость вида $\frac{0}{0}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Раскрыть эту неопределённость значит вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (при условии, что этот предел существует).

Теорема (*1-е правило Лопиталя*). Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки[2] a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и производная $g'(x)$ отлична от нуля всюду в указанной окрестности точки a. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём эти пределы равны:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Например, вычислим с помощью двукратного применения правила Лопиталя предел (предварительно убедившись, что все условия теоремы выполняются):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

[1] *Гийóм Франсуа Лопитáль* (фр. Guillaume Francois Antoine, marquis de L'Hospital; 1661–1704) – французский математик, автор первого учебника по математическому анализу, маркиз. Сын богатых родителей (он происходил из знатного рода и был родственником канцлера де л'Опиталя), маркиз Лопитáль поступил сперва в военную службу, но по слабости зрения вскоре оставил ее и посвятил себя наукам. Состоял членом Парижской академии наук, участник ученого кружка Мальбранша. В 1690-х годах занял видное место в школе Лейбница, с новым методом которого его познакомил Иоганн Бернýлли в 1692 во время своего пребывания в Париже в поместье Лопиталя.

Главная заслуга Лопиталя заключается в первом систематическом изложении математического анализа, данное им в сочинении «Анализ бесконечно малых» (фр. Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, 1696). В этой книге собраны и приведены в стройное целое отдельные вопросы, разбросанные до того в разных повременных изданиях, а также приводится Правило Лопиталя. В предисловии Лопиталь указывает, что без всякого стеснения пользовался открытиями Лейбница и братьев Бернулли и «не имеет ничего против того, чтобы они предъявили свои авторские права на все, что им угодно». Современников, однако, сильно озадачило то, что Иоганн Бернулли предъявил претензии на все сочинение Лопиталя целиком.

[2] Здесь a может быть как конечным числом, так и символом $\pm\infty$.

(здесь мы использовали 1-й замечательный предел).

Для раскрытия неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$ используется 2-е правило Лопиталя.

Теорема (*2-е правило Лопиталя*). Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Пусть, далее, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ и производная $g'(x)$ отлична от нуля всюду в указанной окрестности точки a. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём эти пределы равны:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Производные высших порядков. Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a, b). Если функция $f'(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$, то её производную, т.е. число $(f'(x))'|_{x_0}$, называют *второй производной* (производной *второго порядка*) функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают

$$f''(x_0),\ f^{(2)}(x_0),\ y''|_{x_0},\ y^{(2)}|_{x_0},\ \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0}.$$

Физический смысл 2-й производной $f''(x_0)$ – это *ускорение* движущейся точки в момент времени x_0.

В общем случае, если функция $f^{(n-1)}(x)$ $(n = 2, 3, \dots)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, то её производную $(f^{(n-1)}(x))'|_{x_0}$ называют *n-й производной (производной n-го порядка)* функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f^{(n)}(x_0)$, $y^{(n)}|_{x_0}$, $\left.\dfrac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0}$. Итак, по определению,

$$\left. f^{(n)}(x)\right|_{x_0} = \left.(f^{(n-1)}(x))'\right|_{x_0}.$$

Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную n-го порядка в любой точке множества X, то говорят, что функция *n раз дифференцируема* на множестве X. Принято считать, что $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Примеры: $(e^x)^{(n)} = e^x$, $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$, $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$, $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi n}{2})$.

Формула Ле́йбница для n-й производной произведения двух функций. Пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ n раз дифференцируема в точке x. Тогда их произведение $u(x)v(x)$ также n раз дифференцируемо в точке x, причём n-ю производную этого произведения можно найти по формуле Лейбница:[1]

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Формула Лейбница напоминает бином Ньютона с той лишь разницей, что вместо степеней $u(x)$ и $v(x)$ мы видим производные соответствующих порядков.

Особенно эффективна эта формула в тех случаях, когда одна из перемножаемых функций имеет лишь конечное число отличных от нуля производных.

Например, вычислим n-ю производную функции $y = x^3 e^x$. Положим в формуле Лейбница $u = e^x$, $v = x^3$, тогда $v' = 3x^2$, $v'' = 6x$, $v''' = 6$, $v^{(4)} = v^{(5)} = ... = 0$. Имеем

$$(x^3 e^x)^{(n)} = C_n^0 (e^x)^{(n)} (x^3)^{(0)} + C_n^1 (e^x)^{(n-1)} (x^3)' + C_n^2 (e^x)^{(n-2)} (x^3)'' +$$
$$+ C_n^3 (e^x)^{(n-3)} (x^3)''' = e^x x^3 + n e^x \cdot 3x^2 + \frac{n(n-1)}{2} e^x \cdot 6x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} e^x \cdot 6 =$$
$$= (x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)) e^x.$$

Дифференциалы высших порядков. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x, а аргумент x является либо независимой переменной, либо дважды дифференцируемой функцией некоторой независимой переменной t. *Вторым дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x (обозначение $d^2 f(x)$) называется дифференциал от 1-го дифференциала, т.е.

$$d^2 f(x) = d(df(x)).$$

Вообще, если функция n раз дифференцируема в точке x, то её дифференциал n-го порядка определяется как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка, т.е.

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)).$$

Вычислим, например, 2-й дифференциал функции $f(x)$:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x)) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx) =$$

[1] *Готфрид Вильгельм Лейбниц* (1646–1716) – саксонский философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед.

$$= f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Вместо $(dx)^2$ принято писать просто dx^2 (без скобок). Если x является независимой переменной, то $d^2x = 0$ и выражение для 2-го дифференциала упрощается: $d^2f(x) = f''(x)dx^2$. В общем случае для независимой переменной x получаем простую формулу вычисления дифференциала n-го порядка:

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Формула Лейбница для n-го дифференциала произведения двух функций легко получается из соответствующей формулы для производных, если умножить обе части формулы на dx^n. Итак, пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ n раз дифференцируема в точке x. Тогда их произведение $u(x)v(x)$ также n раз дифференцируемо в точке x, причём n-й дифференциал этого произведения можно найти по формуле:

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k} d^k v,$$

где $d^0u = u$, $d^0v = v$.

В предыдущем примере мы уже вычислили n-ю производную функции $y = x^3e^x$ и получили

$$(x^3e^x)^{(n)} = (x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2))e^x.$$

Теперь легко находим выражение для n-го дифференциала:

$$d^n(x^3e^x) = (x^3e^x)^{(n)}dx^n = (x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2))e^x dx^n.$$

Дифференцирование параметрически заданной функции. Пусть зависимость y от x задана параметрически, т.е. системой двух функций: $x = x(t)$, $y = y(t)$ на некотором множестве $t \in T$. Пусть обе функции дифференцируемы на T, а функция $x(t)$ строго монотонна на T (в этом случае система задаёт однозначную функцию $y = y(x)$). Как найти производную y по x?

Конечно, можно попытаться выразить из равенства $x = x(t)$ переменную t через переменную x (т.е. получить $t = t(x)$) и подставить вместно t в $y = y(t)$. Тогда мы найдём явное выражение y от x и сможем продифференцировать обычным образом. Однако можно поступить иначе и проще. Запишем производную $y'(x)$ в дифференциальной форме и затем поделим одновременно числитель и знаменатель дроби на dt. Тогда в числителе и знаменателе образуются, соответственно, производные $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dx}{dt}$, которые легко вычисляются (как производные функций $x(t)$ и $y(t)$, заданных явно). Таким образом, проблема вычисления производной $\frac{dy}{dx}$ оказывается решена:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Аналогично вычисляются производные высших порядков.

Найдём производную $y'(x)$ параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + 2t, \\ y(t) = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

в произвольной точке t. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(\operatorname{arctg} t)'}{(t^3 + 2t)'} = \frac{1/(1+t^2)}{3t^2 + 2} = \frac{1}{(1+t^2)(3t^2+2)}.$$

Заметим, что найденная производная зависит от параметра t. Чтобы найти, например, $y'(x)$ в точке $t = 0$ (что соответствует $x(0) = 0$), подставим в полученное выражение для производной $t = 0$: $y'_x\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}$.

Дифференцирование неявно заданной функции. Пусть функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешённым относительно y. Как найти производную $y'(x)$? Конечно, можно попытаться выразить из неявного уравнения y через x и затем продифференцировать, однако это не всегда возможно, к тому же существует другой – более простой и эффективный способ. Рассмотрим его суть. При некоторых дополнительных предположениях относительно функции F (сейчас не будем на этом останавливаться), продифференцируем по переменной x равенство $F(x, y(x)) = 0$ как сложную функцию, т.е. с учётом $y = y(x)$, и из полученного в результате равенства останется выразить искомую производную.

Рассмотрим этот приём на примере функции, заданной неявно уравнением $xy^2 - 5x + \ln y = 0$. Чтобы найти $y'(x)$, продифференцируем по x это равенство, учитывая, что y зависит от x, и затем выразим оттуда y':

$$y^2 + 2xyy' - 5 + \frac{y'}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{5 - y^2}{2xy + \frac{1}{y}}.$$

Это и есть искомая производная (заметим, чтобы её вычислить, надо знать не только значение x, но и y). Чтобы найти $y''(x)$, надо ещё раз продифференцировать по x последнее равенство и т.д.

3.3 10 основных теорем о дифференцируемых функциях

Теорема 1 (*достаточное условие строгой монотонности в точке*). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$ (соответственно, $f'(x_0) < 0$), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0.

Это условие не является необходимым. Например, функция $y = x^3$ имеет в точке $x_0 = 0$ нулевую производную, однако строго возрастает в этой точке.

Теорема 1' (*необходимое и достаточное условие нестрогой монотонности на интервале*). Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ не убывала (соответственно, не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции была неотрицательной (соответственно, неположительной) всюду на этом интервале.

Теорема 1" (*достаточное условие строгой монотонности на интервале для дифференцируемой функции*). Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ возрастала (соответственно, убывала) на этом интервале, достаточно, чтобы производная этой функции была положительной (соответственно, отрицательной) всюду на этом интервале.

Подчеркнём, что положительность (соответственно, отрицательность) производной $f'(x)$ на интервале (a, b) не является необходимым условием возрастания (соответственно, убывания) функции $f(x)$ на интервале (a, b). Так, функция $y = x^3$ возрастает на интервале $(-1, 1)$, но производная этой функции $f'(x) = 3x^2$ не является всюду положительной на этом интервале (она обращается в нуль в точке $x = 0$).

Теорема 2 (*Ферма́, или необходимое условие локального экстремума дифференцируемой в данной точке функции*). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Теорема 3 (*Ро́лля*). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во внутренних точках этого сегмента, причём $f(a) = f(b)$, то внутри этого сегмента найдётся точка ξ, производная $f'(\xi)$ в которой равна нулю.

Теорема Ролля имеет простой геометрический смысл: если на концах отрезка функция принимает равные значения, то на кривой $y = f(x)$ найдётся точка, в которой касательная к кривой параллельна оси абсцисс Ox.

Теорема 4 (*Лагра́нжа*). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема во внутренних точках этого сегмента, то внутри этого сегмента найдётся точка ξ такая, что справедлива формула Лагранжа:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Для выяснения геометрического смысла теоремы Лагранжа заметим, что величина $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ является угловым коэффициентом секущей, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ кривой $y = f(x)$, а $f'(\xi)$ является угловым коэффициентом касательной к кривой $y = f(x)$, проходящей через точку $C(\xi, f(\xi))$. Формула Лагранжа означает, что между точками A и B найдётся такая точка C, касательная в которой параллельна секущей AB.

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, дифференцируема во внутренних точках этого сегмента, причём всюду на интервале (a, b) её производная $f'(x)$ равна нулю, то функция $f(x)$ сохраняет постоянное значение на отрезке $[a, b]$.

Теорема 5 (*1-е достаточное условие экстремума*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в проколотой δ-окрестности точки c для некоторого $\delta > 0$ и непрерывна в точке c. Тогда

1) если $f'(x) > 0$ при всех $x \in (c - \delta, c)$ и $f'(x) < 0$ при всех $x \in (c, c + \delta)$, то c — точка строгого локального максимума $f(x)$;

2) если $f'(x) < 0$ при всех $x \in (c - \delta, c)$ и $f'(x) > 0$ при всех $x \in (c, c + \delta)$, то c — точка строгого локального минимума $f(x)$;

3) если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку c, то экстремума в этой точке нет.

Теорема 6 (*2-е достаточное условие экстремума*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c, причём $f'(c) = 0$, и пусть существует конечная $f''(c)$. Тогда, если $f''(c) < 0$ $(f''(c) > 0)$, то c – точка строгого локального максимума (минимума) $f(x)$.

Теорема 7 (*достаточное условие выпуклости*). Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) \leq 0$ $(f''(x) \geq 0)$

для любой точки $x \in (a,b)$, то $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на (a,b).

Теорема 8 (*необходимое условие точки перегиба*). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c и точка $M(c, f(c))$ является точкой перегиба $f(x)$. Тогда $f''(c) = 0$.

Теорема 9 (*достаточное условие перегиба*). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в проколотой δ-окрестности точки c (для некоторого $\delta > 0$) и пусть существует $f'(c)$. Тогда, если $f''(x)$ имеет разные знаки на интервалах $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$, то c — точка перегиба графика $f(x)$.

Следующая теорема формулирует условия, при выполнении которых функцию в окрестности заданной точки можно приблизить алгебраическим многочленом. Это и есть знаменитая формула Те́йлора, которая является одной из важнейших формул математического анализа и имеет многочисленные приложения.

Теорема 10 (*формула Те́йлора* – о приближении функции многочленом). Пусть функция $y = f(x)$ $(n-1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки $x = a$ и n раз дифференцируема в самой точке a. Тогда для любого x из указанной окрестности справедливо представление:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

где $o((x-a)^n)$ (читается *«о»-малое* от $(x-a)^n$) есть некоторая функция, стремящаяся к нулю при $x \to a$ быстрее, чем бесконечно малая функция $(x-a)^n$.

В этой формуле выражение $o((x-a)^n)$ называется *остаточным членом* в форме Пеа́но (существуют и другие формы остаточного члена). Остаточный член вносит самый малый вклад в правой части последнего равенства, и если им пренебречь, то получим следующее приближение функции $f(x)$ в окрестности точки a алгебраическим многочленом n-й степени:

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

В частности, если мы выпишем формулу Тейлора в точке $a = 0$, то получим так называемую формулу Макло́рена[1]:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Если же функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке a, то её можно представить степенным *рядом Тейлора*, т.е. разложить в бесконечную сумму степенных функций:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

В случае $a = 0$ этот ряд называется *рядом Макло́рена.*

Разложения по формуле Маклорена некоторых элементарных функций. В окрестности точки $x = 0$ справедливы разложения:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

На использовании формулы Тейлора[2] основан один из важнейших способов вычисления пределов функций.

Рассмотрим пример:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{6} + o(x)\right) = \frac{1}{6}.$$

---

[1] *Ко́лин МакЛо́рен* (1698–1746) – шотландский математик. В 1709 г. поступил в университет города Глазго, где у него развились математические способности. В 15 лет он уже открыл несколько теорем. В 1717 г., в возрасте 19 лет, стал профессором математики, возглавив кафедру.

[2] См., например, Школа Опойцева (лекция известного математика о разложении функций по формуле Тейлора) по ссылке: https://oschool.ru/lecture/Ek0SFP7fg

Понятие аси́мптот графика функции.

Прямая $x = a$ называется *вертикальной аси́мптотой* к графику функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Например, график дробно-линейной функции $y = 1/x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной аси́мптотой* к графику функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если при достаточно больших x функция представима в виде $f(x) = kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Аналогично определяется аси́мптота при $x \to -\infty$. В частности, если $k = 0$, то прямую $y = b$ называют *горизонтальной аси́мптотой*.

Чтобы найти наклонную асимптоту $y = kx + b$ к графику $f(x)$ при $x \to +\infty$, надо последовательно вычислить коэффициенты k и b:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

Если оба предела существуют и конечны, то вы нашли асимптоту. Если же хотя бы один из этих пределов не существует или обращается в бесконечность, то можно сделать вывод, что наклонная асимптота не существует. Аналогично находится асимптота при $x \to -\infty$.

3.4 Общая схема исследования функции и построения графика

На вопрос Григорию Перельману, почему он отказался от миллиона $, присуждённого ему институтом Клэя за доказательство гипотезы Пуанкаре – загадки тысячелетия, которая не поддавалась никому более 100 лет, тот ответил:[1]

«Я знаю, как управлять Вселенной. И скажите — зачем же мне бежать за миллионом?»

Для построения графика функции $y = f(x)$ необходимо выполнить её исследование, придерживаясь следующей схемы (порядок пунктов можно менять).

1) Найти область определения D_f функции.

2) Найти область значений E_f функции. Указать, является ли функция ограниченной (снизу, сверху, с двух сторон). Найти её точные грани (а если они достигаются, то наименьшее и наибольшее значения).

[1] http://www.softmixer.com/2011/04/blog-post-7779.html

3) Найти точки пересечения графика функции с осями координат, т.е. вычислить $f(0)$ и нули функции (те значения переменной x, в которых $f(x) = 0$).

4) Найти промежутки знакопостоянства функции (где функция принимает положительные значения, а где – отрицательные значения).

5) Определить, является ли функция $f(x)$ чётной, нечётной или функцией общего вида (т.е. ни чётной, ни нечётной). Есть ли у неё другие оси и центры симметрии.

6) Определить, является ли функция периодической. Если да, то найти её (главный – наименьший положительный) период.

7) Найти промежутки непрерывности данной функции и точки разрыва её графика (если они имеются). В каждой точке разрыва указать левый и правый односторонние пределы функции и её значение в самой точке разрыва (если они определены). Найти вертикальные асимптоты к графику $f(x)$ (если они имеются). Охарактеризовать точки разрыва.

8) Указать области, где функция $f(x)$ дифференцируема, вычислить первую производную $f'(x)$. Отметить точки, где производная не существует, но есть односторонние производные. Вычислить в каждой из таких точек правую и левую производные. Это поможет более точно изобразить график $f(x)$ в окрестности указанных точек.

9) Указать (по знаку производной) интервалы монотонности функции.

10) Исследовать функцию на локальные экстремумы.

Для нахождения экстремумов надо найти критические точки 1-го рода (в которых $f'(x) = 0$ либо $f'(x)$ не существует), и проверить, имеется ли в них локальный экстремум, или нет. Если экстремум есть, то охарактеризовать его (строгий или нет, максимум или минимум, каково значение функции f в этой точке). Воспользоваться для этого достаточными условиями существования локального экстремума или его определением.

11) Исследовать поведение функции при $x \to \pm\infty$ (если это возможно), в общем случае – в граничных точках области определения. Найти наклонные аси́мптоты к графику функции.

Чтобы найти наклонную асимптоту при $x \to +\infty$, следует записать её уравнение $y = kx + b$, а затем найти коэффициенты по формулам:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

Асимптота существует, если оба предела существуют и конечны. Аналогично ищется асимптота при $x \to -\infty$.

12) Исследовать функцию на выпуклость.

Для этого следует вычислить вторую производную функции $f''(x)$, отметив критические точки 2-го рода, в которых $f''(x)$ равна нулю или не существует. По знаку второй производной $f''(x)$ определяются интервалы, на которых функция $f(x)$ выпукла вверх или, соответственно, вниз.

13) Исследовать график данной функции на наличие точек перегиба. Точки перегиба возможны там, где $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует (критические точки 2-го рода). В точке перегиба график функции должен иметь касательную. Воспользоваться достаточным условием точки перегиба или её определением.

Завершить исследование построением эскиза графика функции.

Данная схема исследования, в основном, соблюдается и при построении графиков кривых, заданных параметрически и неявно, а также в полярных координатах.

Пример. Исследовать функцию $y = \sin x$ и построить её график.

1) *Область определения*: $D(\sin x) = (-\infty, +\infty)$, т.е. областью определения этой функции является всё множество действительных чисел.

2) *Область значений*: $E(\sin x) = [-1, 1]$. Ограниченность области значений функции означает, что сама функция ограничена и сверху, и снизу (график функции располагается в полосе, ограниченной двумя горизонтальными прямыми $y = -1$ и $y = 1$). Точная верхняя грань ($\sup \sin x$) достигается в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и равна 1 (совпадает с наибольшим значением функции). Точная нижняя грань ($\inf \sin x$) достигается в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и равна -1 (совпадает с наименьшим значением функции).

3) *Пересечение графика функции с осями координат.* График функции пересекает ось Ox в точках $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Вторую координатную ось Oy график пересекает в единственной точке с ординатой $y = \sin 0 = 0$.

4) *Промежутки знакопостоянства функции*:

$$\sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n),$$

$$\sin x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n).$$

5) *Чётность (нечётность).* Функция $y = \sin x$ является нечётной ($\sin(-x) = -\sin x$ при всех $x \in \mathbb{R}$). График функции *центрально симметричен* относительно точки начала координат. Более того, этот гра-

фик имеет бесконечно много центров симметрии, координаты которых $(\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

6) *Периодичность.* Функция является периодической, причём наименьший положительный период функции равен 2π.

7) *Непрерывность.* Функция $y = \sin x$ является непрерывной на всей области определения.

8) *Дифференцируемость.* Функция $y = \sin x$ дифференцируема на всей области определения, причём $(\sin x)' = \cos x$.

9) *Монотонность.* Функция $y = \sin x$ не является монотонной на всей области определения, однако она является монотонной на отдельных промежутках, а именно: функция возрастает там, где $(\sin x)' = \cos x > 0$, и убывает на промежутках, где $(\sin x)' = \cos x < 0$. Решая эти неравенства, находим промежутки монотонности:

$$\text{возрастает на интервалах} \quad (-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n),$$

$$\text{убывает на интервалах} \quad (\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n), \ n \in \mathbb{Z}.$$

10) *Локальные экстремумы.* Приравняв производную к нулю, найдём критические точки 1-го рода (точки возможного экстремума): $\cos x = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. При этом в точках $x = \pi/2 + 2\pi n$ производная меняет знак с $+$ на $-$, а в точках $x = -\pi/2 + 2\pi n$, наоборот, с $-$ на $+$. Это означает, что функция $y = \sin x$ имеет бесконечно много локальных максимумов, равных единице, в точках $x = \pi/2 + 2\pi n$, и бесконечно много локальных минимумов, равных минус единице, в точках $x = -\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

11) *Асимптот* график функции не имеет (вертикальных и наклонных – из-за ограниченности функции, а горизонтальных – поскольку не существует $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sin x$).

12) *Выпуклость.* Найдём $(\sin x)'' = -\sin x$. Функция выпукла вверх там, где её вторая производная отрицательна, и выпукла вниз, где её вторая производная положительна. Решая неравенства, находим: функция выпукла вниз на интервалах $(-\pi + 2\pi n, 2\pi n)$ и выпукла вверх при $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

13) *Точки перегиба.* График функции имеет точки перегиба с координатами $(\pi n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (в этих точках вторая производная обращается в нуль и при переходе через эти точки меняет свой знак).

Опираясь на исследованные выше свойства функции, получаем следующий график, называемый *синусоидой* (см. ниже).

Рис. 1: График функции $y = \sin x$

4 ЛЕКЦИЯ: Первообразная и неопределённый интеграл. Определённый интеграл

«Задача заключается не в том, чтобы учить математике,
а в том, чтобы при посредстве математике дисциплинировать ум».
В. Шрадер (1817–1907), немецкий педагог.

Краткое содержание.

I. Понятие первоо́бразной и неопределённого интеграла и их свойства. Таблица неопределённых интегралов. Основные методы интегрирования: сведение к табличным интегралам, замена переменной, интегрирование «по частям».

II. Понятие определённого интеграла Римана как предела интегральной суммы. Геометрический смысл ОИ как площади криволинейной трапеции. Интегрируемость непрерывных, кусочно-непрерывных и монотонных на отрезке функций. Интеграл с переменным верхним пределом. Существование первообразной у любой непрерывной на интервале функции. Примеры неинтегрируемых по Риману функций (функция Дирихле; неограниченные функции; функции, заданные на бесконечных промежутках). Свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница как основная теорема интегрального исчисления (связь определённого и неопределённого интегралов). Основные методы интегрирования: сведение к табличным интегралам, замена переменной, интегрирование «по частям».

III. Приложения определённого интеграла: вычисление площади криволинейной трапеции, площади криволинейного сектора, длины дуги плоской кривой, объёма и площади поверхности тела вращения и др.

IV. Несобственные интегралы I и II рода как обобщение понятия собственного интеграла (Римана). Сходимость и расходимость.

Литература:

[1]. Разд. 4 (Интегральное исчисление и диф. уравнения). Гл. 10 (Неопределённый интеграл). Гл. 11 (Определённый интеграл).

[2] Часть 1 (Математический анализ функций одной переменной). Гл. 7 (Неопределённый интеграл). Гл. 8 (Определённый интеграл)

[3] Гл. 12 (Неопределённый интеграл). Гл. 13 (Определённый интеграл).

«Общеобразовательное значение курса математики, как и любого другого предмета, состоит прежде всего в тех общих понятиях, которые он даёт и которые расширяют кругозор и способы подхода человека к явлениям жизни. С этой точки зрения математика важна, во-первых, своей логикой, последовательностью и точностью выводов. Во-вторых, математика полезна тем, что она трудна. Её абстрактные строгие рассуждения требуют больших и длительных умственных усилий, требуют не столько памяти, сколько понимания и соображения».

А.Д. Александров (1912–1999), советский математик, физик, философ; альпинист.

4.1 Первоóбразная и неопределённый интеграл

Рассмотрим задачу восстановления функции по её известной производной. Это важнейшая задача интегрального исчисления, называемая *интегрированием.* Процедура интегрирования является обратной процедуре дифференцирования.

Понятие первоóбразной.[1] Пусть на интервале (a, b), возможно бесконечном, определена функция одной действительной переменной $f(x)$. Функция $F(x)$ называется *первоóбразной* по отношению к функ-

[1] Здесь «плавающее» ударение, встречается также ударение на «а»: первообрáзная. См. ссылку: http://slovonline.ru/slovar_el_fonetic/b-16/id-92182/pervoobraznyj.html

ции $f(x)$ на интервале (a, b), если в любой точке этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$. Например, функция $\sin x$ является первообразной для функции $\cos x$ на множестве всех действительных чисел $\mathbb{R}$, поскольку $(\sin x)' = \cos x$.

Заметим, что если функция $f(x)$ имеет на (a, b) хотя бы одну первообразную функцию $F(x)$, то она имеет на этом интервале сразу бесконечное множество первообразных, поскольку любая функция вида $F(x) + C$, где C – произвольное действительное число, также будет удовлетворять определению первообразной. Более того, если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на (a, b), то любая другая первообразная $\overline{F}(x)$ для этой функции на данном интервале имеет вид $\overline{F}(x) = F(x)+C$, где C – некоторое действительное число. Таким образом, любые две первообразные одной функции могут отличаться только на константу.

Если функция $f(x)$, определённая на (a, b), имеет на этом множестве первообразную, то она называется *интегрируемой* на нём.

Понятие неопределённого интеграла. Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на этом множестве и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на (a, b), C – произвольная действительная константа. При этом символ $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ – подынтегральной функцией (если интеграл существует, то функция называется интегрируемой), $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, а dx – её дифференциалом. Например, $\int 0dx = C$, $\int dx = x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Интегралы, выражаемые и невыражаемые в элементарных функциях.

Трудность интегрального исчисления сравнительно с дифференциальным исчислением состоит в том, что неопределённый интеграл от элементарной функции может не быть элементарной функцией. Даже в тех случаях, когда интеграл выражается через элементарные функции (т.е., как говорят, берётся в конечном виде), нет единых рецептов, которые позволяли бы найти такое выражение. В то же время различные способы интегрирования рассматриваются в курсе математического анализа, существуют обширные таблицы интегралов.

Известны сравнительно немногие общие классы функций, для которых интеграл выражается через элементарные функции. Обычно их и изучают в курсе высшей школы. В частности, это рациональные алгебраические функции в виде отношения двух многочленов $P(x)/Q(x)$, иррациональные алгебраические функции, рационально зависящие от $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и x или же от x и рациональных степеней дроби $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, а также, например, рациональные функции синуса и косинуса.

Забегая вперёд, скажем, что любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ всегда имеет на интервале (a,b) первообразную, в качестве которой можно взять определённый интеграл с переменным верхним пределом: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ $(a<x<b)$. Поэтому все элементарные функции интегрируемы на всех интервалах, входящих в их области определения. Однако в результате интегрирования далеко не всегда получаются снова элементарные функции, как это имеет место при дифференцировании.

Примеры интегралов, не выражаемых через элементарные функции:

$$\int e^{-x^2}dx \quad (\textit{интеграл Пуассона}),$$

$$\int \sin(x^2)dx,\ \int \cos(x^2)dx \quad (\textit{интегралы Френеля}),$$

$$li(x)=\int \frac{dx}{\ln x} \quad (\textit{интегральный логарифм}),$$

$$si(x)=\int \frac{\sin x}{x}dx,\ ci(x)=\int \frac{\cos x}{x}dx \quad (\textit{интегральные синус и косинус}) \text{ и др.}$$

Даже если интеграл не поддаётся аналитическому вычислению, его можно рассчитать приближенно с некоторой степенью точности. Так, в курсе *вычислительных методов* изучаются специальные способы приближенного вычисления интегралов.[1]

[1]Из современных программных средств назовём достаточно мощный пакет для онлайн интегрирования «Wolfram Mathematica (online integrator)», который можно найти по ссылке http://integrals.wolfram.com/.

5 марта 2009 г. стартовал амбициозный проект – *Wolfram Alpha*. Создателем этого веб-сервиса является британский физик Стивен Вольфрам (Stephen Wolfram), глава компании Wolfram Research, разработчик широко известной в научных кругах программы *Mathematica*. Создатель позиционирует свое детище не как поисковик (search engine), а как *Computational Knowledge Engine* («Вычислительный Двигатель Знания»), он говорит: «Наша цель – сделать знания доступными всем, когда угодно и где угодно».

IT-аналитики уже окрестили Wolfram Alpha «убийцей Google» («Google Killer»), «интеллектуальным поисковиком», «веб-поисковиком нового поколения», «интернет-генератором умных ответов».

Основные свойства неопределённого интеграла следуют из его определения:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$ $(C \in \mathbb{R})$ (свойства 1-2 отражают взаимно обратный характер операций интегрирования и дифференцирования).

3. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$, где $C \neq 0$ (постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла).

4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (подразумевается, что обе функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на одном и том же множестве). Свойства 3 и 4 отражают свойство *линейности* неопределённого интеграла, причём эти равенства выполняются лишь с точностью до произвольной константы.

Обратим внимание на то, что *приписывать константу* C в неопределённом интеграле *нужно обязательно*, в противном случае вы находите лишь одну из первообразных, и это считается весьма грубой ошибкой.

Таблица простейших неопределённых интегралов. Правильность выполненного интегрирования всегда можно проверить, продифференцировав полученный результат.

Интегралы от степенны́х функций:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \in \mathbb{R},\ n \neq -1,\ x \in \mathbb{R})$;

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $(x \neq 0)$.

Интегралы от показательных (в частности, экспоненциальной при $a = e$) функций:

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x \in \mathbb{R})$, $\quad \int e^x dx = e^x + C$.

Интегралы от тригонометрических функций:

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$ $(x \in \mathbb{R})$;

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $(x \in \mathbb{R})$;

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ $\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right)$;

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ $(x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$.

Интегралы от рациональных функций $(a > 0)$:

8. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C, \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R});$

9. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (x \neq \pm a);$

Интегралы от иррациональных функций:

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a}+C, \\ -\arccos\frac{x}{a}+C \end{cases} \quad (|x|<a);$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C \quad (x^2 \pm a^2 > 0);$

Интегралы от гиперболических функций:

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \quad (x \in \mathbb{R});$
13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C \quad (x \in \mathbb{R});$
14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C \quad (x \in \mathbb{R});$
15. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0).$

Существуют специальные (пополняемые) таблицы неопределённых интегралов, содержащие большое количество ныне известных интегралов, к которым можно обращаться в случае необходимости.

К *основным методам интегрирования* относят следующие:

– сведение к табличным интегралам путём использования различных преобразований, а также свойств интегралов;

– замена переменной интегрирования;

– интегрирование по частям.

1. Интегрирование путём сведения к табличным интегралам с помощью различных преобразований. К преобразованиям такого рода относят обычно следующие:

– добавление (с одновременным вычитанием) к подынтегральной функции константы или некоторого выражения; обычно за этим следует разбиение интеграла в сумму более простых интегралов, например

$$\int \frac{xdx}{x+1} = \int \frac{(x+1)-1}{x+1}dx = \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln|x+1| + C \ (x \neq -1);$$

– одновременное умножение или деление числителя и знаменателя дроби под знаком интеграла на некоторое выражение; например, при интегрировании функций с радикалами часто применяют домножение на сопряженное выражение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}d(x+1) - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}d(x-1) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}\right) + C \ (x \geq 1).$$

– выделение у дроби целой части (часто используется при интегрировании рациональных дробей):

$$\int \frac{2x^2-3x-1}{x+1}dx = \int \frac{2x(x+1)-5x-1}{x+1}dx =$$

$$= \int \frac{2x(x+1)-5(x+1)+4}{x+1}dx =$$

$$= \int \left(2x-5+\frac{4}{x+1}\right) dx = x^2-5x+4\ln|x+1|+C \ (x \neq -1);$$

– использование алгебраических формул сокращённого умножения:

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx =$$

$$= \int (e^{2x}-e^x+1)dx = \frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C;$$

– использование тригонометрических, гиперболических и логарифмических формул и т.п.:

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}+C \ (x \neq \pi+2\pi n, n \in \mathbb{Z});$$

$$\int \operatorname{th}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x}dx = x - \operatorname{th} x + C;$$

$$\int (2^{\ln x} - x^{\ln 2})dx = C \quad (x > 0)$$

(в первом случае использовалась тригонометрическая формула понижения степени $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$, во втором – основное гиперболическое тождество $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$, в последнем случае в силу тождества $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ подынтегральная функция тождественно равна 0).

2. Интегрирование путем замены переменной. Изложим один из сильнейших приемов для интегрирования функций – метод замены переменной интегрирования, или метод подстановки. Рассмотрим два возможных случая.

(A) *Внесение функции под знак дифференциала.* Если подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где функция $g(t)$ непрерывна на множестве T, а функция $t=t(x)$ – непрерывна на соответствующем множестве X вместе со своей производной $t'(x)$, то справедлива следующая формула перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx=\int g(t(x))t'(x)dx=\int g(t)dt. \tag{1}$$

При этом производная $t'(x)$ вносится под знак дифференциала согласно известному свойству дифференциала $t'(x)dx=d(t(x))$. В простейших случаях, чтобы распознать эту ситуацию, бывает достаточно знания табличных интегралов, например,

$$2xdx=d(x^2),\ \cos xdx=d(\sin x),\ \sin xdx=-d(\cos x),\ \frac{dx}{x}=d(\ln x),$$

$$\frac{dx}{x^2+1}=d(\operatorname{arctg}x),\ \frac{dx}{2\sqrt{x}}=d(\sqrt{x}),\ \frac{dx}{\cos^2 x}=d(\operatorname{tg}x),\ e^{2x}dx=d\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right).$$

В более сложных случаях могут потребоваться приобретённый ранее опыт и интуиция:

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=d(\sqrt{1+x^2}),\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=d\left(x+\frac{1}{x}\right)\ \text{и т.п.}$$

Подобную замену переменной интегрирования осуществляют в тех случаях, когда получаемая в результате «новая» подынтегральная функция $g(t)$ удобнее для интегрирования по сравнению с исходной подынтегральной функцией $f(x)$. Основная сложность этого метода состоит в том, чтобы «увидеть» в исходном подынтегральном выражении $f(x)dx$ более простое для интегрирования выражение $g(t(x))t'(x)\ dx=g(t)dt$.

Практически реализация метода заключается во внесении функции $t'(x)$ под знак дифференциала dx с образованием нового дифференциала dt. Вычислив интеграл $\int g(t)dt = G(t) + C$, в конце необходимо вернуться к первоначальной переменной интегрирования x путем обратной подстановки $t = t(x)$:

$$\int f(x)dx = G(t(x)) + C.$$

Например, вычислим интеграл $\int \sin^3 x \cos x dx$. Так как $\cos x dx = d(\sin x)$, то, полагая $t = \sin x$, преобразуем подынтегральное выражение к виду $\sin^3 x \cos x dx = \sin^3 x d(\sin x) = t^3 dt$. Интеграл от последнего выражения вычисляется легко:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Осталось лишь вернуться к переменной x, подставляя $\sin x$ вместо t:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{(\sin x)^4}{4} + C.$$

Заметим также, что при определённом навыке новую переменную в простых случаях можно в явном виде не вводить, проделав это мысленно. Скажем, в рассмотренном выше примере можно было обойтись без введения новой переменной t . Тогда решение задачи выглядело бы короче:

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{(\sin x)^4}{4} + C.$$

(B) *Использование подстановок.* Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, то, полагая $x = x(t)$, где функция $x(t)$ непрерывна на соответствующем множестве T вместе со своей производной $x'(t)$, получим еще одну формулу перехода от x к новой переменной интегрирования t:

$$\int f(x)dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t)dt. \tag{2}$$

Нередки ситуации, когда для решения одной и той же задачи могут существовать различные подстановки. Умение подобрать наиболее эффективную в данной конкретной ситуации подстановку определяет, в том числе, культуру интегрирования учащегося.

Пример. Найти неопределённый интеграл: $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Решение. *1-й способ.* Сделаем рационализирующую замену переменной, положив $t = \sqrt{x^2-1}$, тогда $x^2 = t^2 + 1$, $xdx = tdt$ и

$$\int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{tdt}{(t^2+1)t} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + C \ (|x| > 1).$$

2-й способ. Положим $t = \sqrt{x^2-1} + x$ (1-я подстановка Эйлера), тогда $x^2 - 1 = (t-x)^2$ $\Rightarrow x = \dfrac{t^2+1}{2t}$, $dx = \dfrac{t^2-1}{2t^2}dt$ и для интеграла получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\frac{t^2-1}{2t^2}dt}{\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2-1}{2t}} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2-1}+x) + C.$$

Полученные при решении разными способами интегралы внешне выглядят по-разному, но оба представления верны и являются эквивалентными формами. Верность решений всегда можно проверить дифференцированием.

3. Интегрирование по частям. Если $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые на одном и том же множестве функции и существует первообразная для функции $u(x)v'(x)$, то существует и первообразная для функции $v(x)u'(x)$, причём справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

или, в краткой форме,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv – оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путем интегрирования.

Данный метод используют в тех случаях, когда интеграл в правой части формулы вычисляется проще исходного интеграла (в левой части). Как правило, формула применяется в ситуациях, когда подынтегральная функция представляет собой произведение «разнородных» функций. В целом, интегрирование по частям имеет более ограниченную область применения, чем замена переменной, но есть целые классы интегралов, например,

$$\int x^n e^{ax}dx,\ \int x^n \sin(ax)dx,\ \int x^n \ln^m x dx\ (n, a \in \mathbb{R}, n \neq -1, m \in \mathbb{N}),$$

$$\int \sin(\ln x)dx,\ \int e^{ax}\cos(bx)dx\ (a, b \in \mathbb{R}),\ \int P(x)e^{ax}dx,\ \int P(x)\sin(ax)dx,$$

$$\int P(x)\ln x dx,\ \int P(x)\arcsin x dx,\ \int P(x)\operatorname{arctg} x dx,$$

где $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ – целый алгебраический многочлен относительно x, которые вычисляются именно с помощью интегрирования по частям. При этом в интегралах $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin(ax)dx$ за u следует принять $P(x)$, а за dv, соответственно, выражения $e^{ax}dx, \sin(ax)dx$; а в интегралах вида $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x) \arcsin x dx$ за u принимаются, соответственно, функции $\ln x$, $\arcsin x$, а за dv – выражение $P(x)dx$.

В некоторых случаях для получения результата приходится несколько раз интегрировать по частям, постепенно упрощая задачу.

Пример. Найти неопределённый интеграл: а) $\int x^2 \sin x dx$; б) $\int \cos(\ln x)dx$.

Решение. а) Возьмём $u = x^2$, $dv = \sin x dx$, тогда $du = 2x dx$, $v = -\cos x$, проинтегрируем по частям:

$$\int x^2 \sin x dx = x^2 \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) 2x dx.$$

Интеграл упростился, проинтегрируем по частям ещё раз, выбирая аналогично $u = x$, $dv = \cos x dx$. Тогда $du = dx$, $v = \sin x$, и в результате имеем:

$$-x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin x dx\right) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

б) Положим $t = \ln x$, тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$, и интеграл принимает вид $\int e^t \cos t dt$. Проинтегрируем его по частям:

$$I = \int e^t \cos t dt = e^t \sin t - \int e^t \sin t dt = e^t \sin t + \left(e^t \cos t - \int e^t \cos t dt\right) =$$

$$= e^t(\sin t + \cos t) - I.$$

Выражая из полученного равенства I и приписывая константу C, окончательно находим:

$$I = \frac{e^t}{2}(\sin t + \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C, \quad x > 0.$$

Можно было вычислить этот интеграл и не прибегая к предварительной замене переменной, а сразу непосредственно интегрируя по частям. Так, положим $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx$, тогда

$$I = \int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) - \int x\left(-\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx.$$

Ещё раз проинтегрируем получившийся интеграл по частям:

$$I = x\cos(\ln x) + \left(x\sin(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}dx\right) = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) - I,$$

откуда находим $I = \dfrac{x}{2}\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right) + C$.

4.2 Определённый интеграл

Понятие определённого интеграла Римана. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$. Разобьём отрезок $[a, b]$ произвольным образом на n частей точками: $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Выберем на каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i, $i = \overline{1, n}$. Обозначив через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ длину i-го отрезка разбиения, составим для рассматриваемого произвольного разбиения сумму:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Эта сумма называется *интегральной суммой*, или *суммой Римана*, для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если $f(x) > 0$, то интегральная сумма S_n представляет собой сумму площадей прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i)$, $i = \overline{1, n}$, т.е. площадь ступенчатой фигуры, образованной этими прямоугольниками, и приближает площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу – отрезком $[a, b]$ оси Ox, слева и справа – вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

Обозначим $\Delta = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$ – наибольшую из длин частичных отрезков и назовём её *диаметром разбиения*. Устремим теперь в интегральной сумме диаметр разбиения к нулю, перейдя к пределу

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Если этот предел существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения отрезка на частичные сегменты, ни от выбора промежуточных точек ξ_i, то он называется *определённым интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Риману* (*в собственном смысле*), числа a и b, соответственно, *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Отметим различия в понятиях определённого и неопределённого интегралов: неопределённый интеграл $\int f(x)dx$ есть семейство функций, а определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ есть действительное число, одна из характеристик функции.

Геометрическая интерпретация определённого интеграла: когда функция $f(x)$ неотрицательна на $[a, b]$, интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади указанной выше криволинейной трапеции.

Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, то она ограничена на этом сегменте (*необходимое условие интегрируемости*). Отсюда, как следствие, получаем: неограниченная на $[a, b]$ функция не интегрируема по Риману на этом сегменте. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: не всякая ограниченная на сегменте $[a, b]$ функция является интегрируемой по Риману. Примером такой функции является функция Дирихле, у которой предел интегральной суммы зависит от выбора промежуточных точек ξ_i (их можно выбирать как рациональными, так и иррациональными).

Классы интегрируемых функций. Для каких функций заведомо существует интеграл Римана? Ответ на этот вопрос дают следующие утверждения.

1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Как видно из этого утверждения, класс интегрируемых функций шире класса дифференцируемых функций. Известно, что всякая дифференцируемая функция непрерывна, но не всякая непрерывная функция дифференцируема. Итак, непрерывности функции недостаточно для её дифференцируемости, но достаточно для интегрируемости. Более того, существуют классы интегрируемых функций, не являющихся непрерывными. Приведём без доказательства теоремы об этих функциях.

2. *Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет на нём лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.* Отсюда следует, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ отличаются друг от друга только в конечном числе точек, то они одновременно интегрируемы или нет в смысле Римана на $[a, b]$, и если интегрируемы, то их интегралы равны:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Возникает вопрос: как «много» точек разрыва может иметь ограниченная функция, чтобы быть интегрируемой? Приведём без доказательства теорему, отражающую необходимые и достаточные условия интегрируемости функции на заданном сегменте по Риману.

3. (Критерий Лебега интегрируемости функции). *Функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва имеет меру нуль по Лебегу.*[1]

Можно показать, что любое счётное числовое множество имеет меру нуль по Лебегу. Таким образом, функции, ограниченные и имеющие на некотором сегменте счётное число точек разрыва, всегда интегрируемы на этом сегменте.

Более того, существуют числовые множества мощности континуум, имеющие лебегову меру нуль (например, так называемое множество Ка́нтора). Значит, множество точек разрыва интегрируемой функции может иметь мощность континуум.

4. Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Свойства определённого интеграла.

1. Если функция $f(x)$ определена в точке a, то по определению будем полагать

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Если $a < b$ и $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, то по определению

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

2. *Линейное свойство.* Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Риману на сегменте $[a, b]$, α и β – произвольные действительные числа. Тогда функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, причём

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Сумма интегрируемой и неинтегрируемой функций есть функция неинтегрируемая.

---

[1]Числовое множество X называется ***множеством меры нуль*** (*по Лебегу*), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечная или счётная система интервалов, покрывающих все точки множества X , причём сумма длин этих интервалов меньше ε.

3. *Интегрируемость произведения.* Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a, b]$, то их произведение $f(x)g(x)$ также интегрируемо на $[a, b]$.

4. *Аддитивность интеграла.* Если функция $f(x)$ интегрируема на каждом из двух смежных сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на их объединении – сегменте $[a, b]$, причём

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$ и неотрицательна на этом сегменте, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

6. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$ и если в каждой точке x этого сегмента справедливо неравенство $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

7. *Формула среднего значения.* Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, а M и m обозначают, соответственно, её точную верхнюю и точную нижнюю грани на этом сегменте, то найдётся число $\mu \in [m, M]$ такое, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a).$$

Если при этом функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то на этом сегменте найдётся точка ξ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

8. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема по Риману на этом сегменте, причём справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Из интегрируемости $|f(x)|$ на сегменте $[a, b]$ не вытекает, вообще говоря, интегрируемость функции $f(x)$ на этом сегменте. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{если } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \end{cases}$$

не интегрируема на отрезке $[0, 1]$, при этом $|f(x)| \equiv 1$ интегрируема на $[0, 1]$.

Существование первообразной у любой непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$. Функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a \leq x \leq b),$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом* от функции $f(x)$ на $[a, b]$. Аналогично вводится понятие интеграла с переменным нижним пределом.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $a < x < b$, а c – любая фиксированная точка этого интервала, то функция $F(x)$, определяемая интегралом с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt,$$

является первообразной функции $f(x)$ на этом интервале, т.е.

$$F'(x) = f(x).$$

Формула Ньютона-Лейбница, или Основная формула интегрального исчисления. Эта формула позволяет для любой непрерывной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$ свести вычисление определённого интеграла от $f(x)$ по указанному сегменту к вычислению разности значений любой первообразной этой функции в точках a и b.

Теорема (*Формула Ньютона-Лейбница*). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$ на этом сегменте, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ называется *двойной подстановкой.* Использование формулы Ньютона-Лейбница – основной способ вычисления определённых интегралов.

Например, $\int_a^b \cos x dx = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a$.

Основные методы вычисления определённых интегралов. Поскольку формула Ньютона–Лейбница позволяет свести вычисление определённого интеграла к вычислению любой его первообразной с последующей двойной подстановкой нижнего и верхнего пределов, то определённые интегралы вычисляются на практике теми же методами, что и неопределённые.

Перечислим три основных подхода к интегрированию:

– использование для упрощения интеграла и сведения его к табличным интегралам алгебраических, тригонометрических и прочих преобразований подынтегральной функции, а также свойств интегралов;

– замена переменной интегрирования;

– интегрирование по частям.

Замена переменной в определённом интеграле. Отметим разницу в методе замены переменной в случае с неопределённым интегралом. Сформулируем соответствующие теоремы.

Теорема 1 (*внесение функции $t'(x)$ под знак дифференциала*). Пусть дан определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$, в котором подынтегральное выражение $f(x)dx$ представимо в виде $g(t(x))t'(x)dx$, где 1) $t = t(x)$ – непрерывно дифференцируемая на сегменте $[a, b]$ функция, и $[c, d]$ – множество её значений на $[a, b]$; 2) функция $g(t)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$. Тогда справедлива следующая формула перехода от переменной интегрирования x к новой переменной интегрирования t:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(t(x))t'(x)dx = \int_{t(a)}^{t(b)} g(t)dt.$$

Теорема 2 (*использование подстановки $x = x(t)$*). Пусть выполнены следующие условия: 1) $x = x(t)$ – непрерывно дифференцируемая[1] на сегменте $[t_0, T]$ функция, и сегмент $[c, d]$ – множество её значений на $[t_0, T]$; 2) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[c, d]$; 3) $x(t_0) = a$, $x(T) = b$. Тогда справедлива следующая формула перехода от переменной интегрирования x к новой переменной t:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^T f(x(t))x'(t)dt.$$

[1] *Непрерывно дифференцируемая* функция есть дифференцируемая функция, у которой первая производная непрерывна. Такие функции часто называют *гладкими* функциями.

Пример. Применяя подходящую замену переменной, найти интегралы:

$$\text{а) } \int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}, \quad \text{б) } \int_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Решение. а) Положим $t = 5-4x$ (условия теоремы 1 выполняются: функция $t = 5-4x$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[-1,1]$; её множеством значений является отрезок $[1,3]$; кроме того, функция $g(t) = (5-t^2)/(4t)$ – непрерывна на $[1,3]$), тогда $dx = -\frac{1}{2}tdt$, и приходим к интегралу

$$\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}} = \frac{1}{8}\int_{1}^{3}(5-t^2)dt = \frac{1}{8}\left(5t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{6}.$$

б) Выполним тригонометрическую подстановку: $x = a\sin t$, $t \in [0,\pi/2]$ (условия теоремы 2 выполняются: функция $x = a\sin t$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[0,\pi/2]$, причём сегмент $[0,a]$ является множеством её значений; функция $f(x) = x^2\sqrt{a^2-x^2}$ непрерывна на сегменте $[0,a]$; $x(0)=0$, $x(\pi/2)=a$). Тогда $dx = a\cos tdt$ и получаем

$$I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2\cos^2 t}a\cos tdt = a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t|\cos t|\cos tdt.$$

Учитывая, что $|\cos t| = \cos t$ при $t \in [0,\pi/2]$, окончательно находим

$$I = a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2tdt = \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

Интегрирование по частям в определённых интегралах.

Теорема (*интегрирование по частям*). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны вместе со своими производными (1-го порядка) на сегменте $[a,b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x).$$

Метод имеет смысл применять в том случае, и так подбирать функции $f(x)$ и $g(x)$, чтобы полученный справа интеграл оказался проще исходного интеграла в левой части.

Пример. Применяя формулу интегрирования по частям, найти интеграл $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$.

Решение.

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx = -e^{-x}x\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx = -\,e^{-\ln 2}\ln 2 - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

4.3 Приложения определённого интеграла

4.3.1 Вычисление площади плоской фигуры

Понятие площади. Введём понятие площади для произвольной плоской фигуры F. Рассмотрим всевозможные многоугольники P, целиком содержащиеся в F, а также многоугольники Q, целиком содержащие F. Фигуры P будем называть «*вписанными в* F», а фигуры Q – «*описанными около* F». Заметим, что числовое множество $S(P)$ площадей всех вписанных многоугольников P ограничено сверху, например, площадью любого описанного многоугольника Q. Поэтому это множество имеет конечную точную верхнюю грань, которую обозначим $\underline{S} = \sup\limits_{P \subseteq F} S(P)$, которую будем называть *нижней площадью* фигуры F. Если в фигуру F нельзя вписать ни одного многоугольника, то по определению полагается $\underline{S} = 0$.

Аналогично, числовое множество $S(Q)$ площадей всех описанных около фигуры F многоугольников Q ограничено снизу, например, площадью любого вписанного многоугольника или нулём, и поэтому у него существует конечная точная нижняя грань $\overline{S} = \inf\limits_{Q \supseteq F} S(Q)$, называемая *верхней площадью* фигуры F. Очевидно, что $S \leq S$. Плоская фигура F называется *квадрируемой* (т.е. имеющей конечную площадь), если $\underline{S} = \overline{S}$. Число $S = \underline{S} = \overline{S}$ называется при этом *площадью* фигуры F.

Теорема (*необходимое и достаточное условие квадрируемости*). Для того чтобы плоская фигура F была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы её граница имела площадь нуль.

Вычисление площади плоской фигуры с помощью определённого интеграла Римана.

1. *Площадь криволинейной трапеции.* Мы уже говорили о том, что в прямоугольной системе координат интеграл от неотрицательной функции $y = f(x)$ по сегменту $[a, b]$ численно равен площади S соответствующей криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Можно обобщить эту формулу на случай, когда криволинейная трапеция ограничена сверху графиком непрерывной функции $y = y_2(x)$, снизу – графиком другой непрерывной функции $y = y_1(x)$, а слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$. Тогда площадь этой криволинейной трапеции может быть вычислена по формуле:

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx.$$

Симметричная формула для вычисления площади плоской фигуры, ограниченной слева и справа, соответственно, графиками непрерывных функций $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$, а снизу и сверху прямыми $y = c$ и $y = d$, имеет вид:

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))dy.$$

Приведённые формулы могут быть использованы и в том случае, когда кривая, ограничивающая фигуру, задана *параметрически* уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, где функции $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные $x'(t)$, $y'(t)$ на сегменте $[T_0, T]$. Для этого достаточно в соответствующих интегралах от x (или от y) перейти к переменной интегрирования t (в этих формулах принято такое направление движения по кривой, что фигура, площадь которой вычисляется, находится слева). Формулы примут вид:

$$S = \int_T^{T_0} (y_2(x(t)) - y_1(x(t)))x'(t)dt \quad (a = x(T),\ b = x(T_0)),$$

$$S = \int_{T_0}^{T} (x_2(y(t)) - x_1(y(t)))y'(t)dt \quad (c = y(T_0),\ d = y(T)).$$

Если кривая задана неявно, то при вычислении площади её вначале параметризуют. Например, астроида задаётся неявно уравнением $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, в то время как её параметрические уравнения: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, где $t \in [0, 2\pi)$.

2. *Площадь криволинейного сектора.* В полярной системе координат, как и в декартовой, кривые, ограничивающие плоскую фигуру, могут быть заданы параметрически уравнениями $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, где $t \in T$, в частности, явным образом уравнением $r = r(\varphi)$ (или $\varphi = \varphi(r)$), а также неявно уравнением $F(r, \varphi) = 0$, не разрешённым относительно ни одной из переменных.

Пусть плоская кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, разрешённым относительно r (т.е. зависимость r от φ

задана явным образом), где $\varphi \in [\alpha, \beta]$, причём функция $r(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на этом сегменте. Назовём *криволинейным сектором* плоскую фигуру, ограниченную кривой L и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β.

Теорема (*площадь криволинейного сектора*). Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

4.3.2 Вычисление длины дуги кривой

Плоской кривой L назовём множество всех точек M плоскости, координаты x и y которых в декартовой (прямоугольной) системе координат Oxy определяются уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \{t\}$, где функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны в каждой точке своей области задания $\{t\}$. В качестве множества $\{t\}$ значений параметра t наряду с сегментами могут выступать конечные и бесконечные интервалы и полуинтервалы. Для определённости в дальнейшем, если не оговорено противное, под $\{t\}$ будем понимать сегмент $[T_0, T]$.

Помимо параметрического способа задания, плоская кривая может быть задана также с помощью одного уравнения $y = y(x)$, разрешённого относительно переменной y (или уравнением $x = x(y)$, разрешённым относительно переменной x). В этих случаях принято считать, что кривая задана *явным образом*.

Наконец, кривую на плоскости можно задать с помощью уравнения с двумя переменными, не разрешённого ни относительно y, ни относительно x: $F(x, y) = 0$. В этом случае говорят о *неявном задании* кривой.

Пространственная кривая[1] – это множество M точек пространства, координаты x, y, z которых в прямоугольной системе координат $Oxyz$ определяются параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in \{t\}$, где функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны на множестве $\{t\}$.

Кривую в пространстве можно также определять как пересечение двух поверхностей, задаваемых уравнениями: $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$.

[1]Мы здесь рассматриваем самый изученный класс *непрерывных* кривых.

Например, прямую можно задать как пересечение двух плоскостей, а система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ определяет в пространстве замкнутую кривую, носящую название *кривой Вивиани* (кривая, по которой пересекаются сфера и прямой цилиндр). Кривую Вивиани можно представить и параметрически: $x = a\sin^2 t$, $y = a\sin t\cos t$, $z = a\cos t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Введём понятие длины дуги кривой. Те кривые, которые имеют длину, принято называть *спрямляемыми*. Рассмотрим простую (без точек самопересечения) незамкнутую плоскую кривую L, которая параметризуется уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $[T_0, T]$. Выполним произвольное разбиение $\overline{T}$ отрезка $[T_0, T]$: $T_0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$. Этому разбиению соответствует разбиение кривой L точками $M_0, M_1, ..., M_n$, где $M_i(x(t_i), y(t_i))$, $i = \overline{0, n}$. Образовавшуюся при этом ломаную $l(\overline{T}) = M_0M_1...M_n$ будем называть ломаной, *вписанной* в кривую L и отвечающей разбиению $\overline{T}$ сегмента $[T_0, T]$. Устремим длину Δ максимального звена вписанной ломаной (диаметр разбиения) к 0. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta\to 0} l(\overline{T})$, то его называют *длиной* кривой L. Длину кривой, как и саму кривую, будем для простоты обозначать также через L (по контексту обычно ясно, что имеется в виду: сама кривая или её длина).

Заметим, что в то же время длина кривой есть точная верхняя грань множества длин всех вписанных в эту кривую ломаных, т.е. $L = \sup\limits_{\overline{T}} l(\overline{T})$. Понятие длины дуги пространственной кривой вводится аналогично.

Теорема 1 (*достаточное условие спрямляемости плоской кривой и длина дуги в прямоугольных координатах*). Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные $x'(t)$ и $y'(t)$ на сегменте $[T_0, T]$[1]. Тогда кривая L, определяемая параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, спрямляема, и длина её дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{T_0}^{T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

[1]Такие функции называют *непрерывно дифференцируемыми* и пишут $x(t), y(t) \in C^{(1)}[T_0, T]$, а кривые, описываемые этими функциями, называют *гладкими*. В каждой точке гладкой кривой существует касательная.

Подынтегральное выражение $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$ называется при этом *дифференциалом дуги* и обозначается dl. Для плоских спрямляемых кривых справедливо равенство $dl^2 = dx^2 + dy^2$, где $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$.

Пример. Найти длину дуги, отвечающей одной арке циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, где $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.

Решение.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1-\cos t))^2 + (a\sin t)^2}dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| dt =$$

$$= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 4a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right) = -4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Следствие. Если кривая задана *явно* уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то её можно описать параметрическими уравнениями $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$. Легко проверить, что длина дуги в этом случае выражается формулой:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Теорема 2 (*пространственный случай в прямоугольных координатах*). Если пространственная параметризуемая кривая L задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$ на сегменте $[T_0, T]$, то длина её дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{T_0}^{T} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Теорема 3 (*достаточное условие спрямляемости плоской кривой и длина дуги в полярных координатах*). Если кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, причём функция $r(\varphi)$ непрерывна и имеет на сегменте $[\varphi_1, \varphi_2]$ непрерывную производную $r'(\varphi)$, то кривая L спрямляема, и длина её дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi.$$

Если плоская кривая L задана в прямоугольной системе координат *неявным* уравнением $F(x, y) = 0$, то для вычисления длины дуги либо выражают явно y через x (или x через y), или параметризуют кривую, и уже после этого вычисляют длину дуги по соответствующей формуле. Аналогично поступают в полярных координатах.

Пример. Найти длину дуги кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ $(a > 0)$.

Решение. Имеем $r'(\varphi) = -a\sin\varphi$, $(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2 = a^2(2 + 2\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$, тогда

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi = 2a\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 8a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 8a.$$

4.3.3 Вычисление объёмов тел, в том числе тел вращения

Понятие объёма тела вводится аналогично понятию площади плоской фигуры. При этом термин «многоугольник» следует заменить термином «многогранник». Тело, имеющее конечный объём, называется *кубируемым.*

Теорема (*необходимое и достаточное условие кубируемости*). Для того чтобы тело F было кубируемо, необходимо и достаточно, чтобы его граница имела объём нуль.

Объём кубируемого тела равен одному и тому же числу независимо от того, с границей или без границы рассматривается это тело.

1. *Вычисление объёма тела по известным площадям поперечных сечений.* Рассмотрим в прямоугольной системе координат Oxy некоторое (кубируемое) тело F, расположенное между плоскостями $x = a$ и $x = b$ так, что при любом $x \in [a, b]$ известна площадь $S(x)$ сечения данного тела плоскостью, проходящей через точку $(x; 0; 0)$ $(a \leq x \leq b)$ перпендикулярно оси Ox.

Теорема 1. Пусть площадь $S(x)$ сечения кубируемого тела F как функция x непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда объём тела F вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

2. *Объём тела вращения в прямоугольных координатах.*

Теорема 2 (*Криволинейная трапеция задана стандартно относительно оси Ox и вращается вокруг оси Ox*). Пусть функция $y = y(x)$

непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда тело F_x, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции

$$F = \{(x;y)|\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le y(x),\ y(x) \in C[a,b]\},$$

кубируемо, и его объём V_x может быть вычислен по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)dx.$$

Пример. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.

Решение. Имеем

$$V_x = \pi \int_0^2 y^2(x)dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)dx = \frac{16\pi}{15}.$$

Аналогично выписывается симметричная формула для вычисления объёма тела, полученного вращением криволинейной трапеции

$$F = \{(x;y)|\ c \le y \le d,\ 0 \le x \le x(y),\ x(y) \in C[c,d]\}$$

вокруг оси Oy:

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)dy.$$

Если кривая задана параметрически, то следует в соответствующем интеграле перейти к переменной интегрирования t.

Теорема 3 (*Криволинейная трапеция задана стандартно относительно оси Ox и вращается вокруг оси Oy*). Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$. Тогда тело F_y, образованное вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции

$$F = \{(x;y)|\ 0 \le a \le x \le b,\ 0 \le y \le y(x)\}$$

кубируемо, и его объём V_y может быть вычислен по формуле

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$

3. *Объём тела вращения в полярных координатах.*

Теорема 4 (*Криволинейный сектор в полярных координатах вращается вокруг полярной оси OP*). Пусть функция $r = r(\varphi)$ непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$. Тогда тело F_p, образованное вращением вокруг полярной оси криволинейного сектора

$$F = \{(r; \varphi) |\ 0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi,\ 0 \le r \le r(\varphi)\},$$

кубируемо, и его объём V_p может быть вычислен формуле

$$V_p = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

4.3.4 Вычисление площади поверхности тела вращения

Пусть в трёхмерном пространстве введена декартова прямоугольная система координат $Oxyz$. *Поверхностью* назовём множество всех точек M, координаты x, y и z которых определяются двухпараметрическими уравнениями

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),$$

где $(u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ обычно предполагаются непрерывными на Ω.

Помимо задания тремя параметрическими уравнениями, поверхность в декартовом пространстве может быть задана также *неявно* с помощью одного уравнения, не разрешённого относительно ни одной из переменных: $F(x, y, z) = 0$.

Пример. Параметрические уравнения $x = R \sin u \cos v$, $y = R \sin u \sin v$, $z = R \cos u$, где $0 \le u \le \pi$, $0 \le v < 2\pi$, R – положительное число, определяют сферу радиуса R с центром в начале координат. Исключение параметров u, v из данных трёх параметрических уравнений приводит к неявному уравнению сферы:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Если поверхность задана одним из уравнений вида $z = z(x, y)$, $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$, то говорят, что поверхность задана *явным образом.*[1]

1. *Площадь поверхности вращения в декартовых координатах в случае параметрического задания кривой вращения.*

[1] При этом поверхность назовём *гладкой*, если она задаётся параметрическими уравнениями, где функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка в некоторой ограниченной замкнутой области Ω на плоскости (u, v). В каждой точке такой поверхности существует касательная плоскость.

Теорема 1 (*случай параметрического задания кривой*). Пусть плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, где $x(t)$, $y(t) \in C^{(1)}([T_0, T])$, $y(t) \geq 0$ на сегменте $[T_0, T]$. Тогда площадь поверхности, полученной вращением дуги AB вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$S_{\text{пов.,x}} = 2\pi \int_{T_0}^{T} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

2. *Площадь поверхности вращения в декартовых координатах в случае явного задания кривой вращения.*

Теорема 2 (*случай явного задания кривой в декартовых координатах*). Если кривая задана явно уравнением $y = y(x)$, где неотрицательная функция $y(x)$ непрерывна вместе со своей первой производной на отрезке $[a, b]$, то площадь поверхности, полученной вращением дуги кривой вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$S_{\text{пов.,x}} = 2\pi \int_{a}^{b} y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

3. *Площадь поверхности вращения в полярных координатах.*

Теорема 3. Если кривая задана явно в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \leq \pi$, где функция $r(\varphi)$ непрерывна вместе со своей производной 1-го порядка на сегменте $[\varphi_1, \varphi_2]$, то площадь поверхности, полученной вращением дуги кривой вокруг полярной оси OP, вычисляется по формуле

$$S_{\text{пов.,OP}} = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin\varphi \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi.$$

Физические и др. приложения определённого интеграла. Данный пункт посвящён приложениям из области физики, в частности, механики.

1. Пусть AB – дуга плоской гладкой кривой, $\rho(l)$ – линейная плотность массы в текущей точке кривой ($0 \leq l \leq L$). Тогда *масса* M кривой вычисляется по формуле

$$M = \int_{0}^{L} \rho(l)dl,$$

где dl – дифференциал дуги. Рассмотрим частные случаи.

а) Если кривая задана *явным образом* в декартовой системе координат уравнением $y = y(x)$, где $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$, то её масса вычисляется по формуле

$$M = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx.$$

б) Пусть теперь простая плоская кривая задана в декартовой системе координат *параметрическими уравнениями* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [T_0, T]$, где $x(t)$, $y(t)$ непрерывны на $[T_0, T]$ вместе со своими первыми производными, и пусть $\rho(x(t), y(t))$ – линейная плотность распределения массы в точке $(x; y)$ этой кривой. Тогда масса кривой вычисляется по формуле

$$M = \int_{T_0}^T \rho(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

в) В случае, когда кривая задана явным образом *в полярной системе координат* уравнением $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi) \in C^{(1)}[\varphi_1, \varphi_2]$, то масса кривой вычисляется по формуле

$$M = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi.$$

2. *Координаты центра тяжести плоской кривой.* Координаты центра тяжести дуги плоской кривой находятся по формулам

$$x_c = \frac{1}{L}\int_0^L x(l)dl, \quad y_c = \frac{1}{L}\int_0^L y(l)dl.$$

а) В частности, если плоская кривая задана в декартовой системе координат *явным уравнением* $y = y(x)$, $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$, то координаты центра тяжести её дуги вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{1}{L}\int_a^b xdl, \quad y_c = \frac{1}{L}\int_a^b y(x)dl,$$

где $dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$, $L = \int_a^b dl$.

б) Если плоская кривая задана *параметрическими уравнениями* $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t \in [T_0, T]$, $x(t), y(t) \in C^{(1)}[T_0, T]$, $x(T_0) = a$, $x(T) = b$, то координаты центра тяжести её дуги вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{1}{L}\int_{T_0}^T x(t)dl, \quad y_c = \frac{1}{L}\int_{T_0}^T y(t)dl,$$

где $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dx$, $L = \int_{T_0}^{T} dl$.

в) Если кривая задана *явно в полярной системе координат* уравнением $r = r(\varphi) \in C^{(1)}[\varphi_1, \varphi_2]$, то

$$x_c = \frac{1}{L}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\cos\varphi dl, \quad y_c = \frac{1}{L}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\sin\varphi dl,$$

где $dl = \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}d\varphi$, $L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dl$.

3. *Работа* по перемещению материальной точки из точки a оси Ox в точку b под действием параллельной оси Ox непрерывной переменной силы $F(x)$ численно равна интегралу

$$\int_a^b F(x)dx.$$

4. *Путь* S, пройденный материальной точкой, движущейся прямолинейно с непрерывной переменной скоростью $v(t)$ (функция времени t) за промежуток времени $a \le t \le b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b v(t)dt.$$

5. Существуют приложения определённого интеграла и в экономике. Например, если функция $y = f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени, то объём продукции Q, произведённой за промежуток времени $[t_1, t_2]$, может быть вычислен по формуле

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

4.3.5 Несобственные интегралы

Выше было рассмотрено понятие определённого интеграла Римана, или собственного интеграла. При этом предполагалось, что промежуток интегрирования конечен, а подынтегральная функция является ограниченной. Данный пункт посвящён обобщению этого понятия на те случаи, когда либо промежуток интегрирования бесконечен, либо подынтегральная функция является неограниченной.

Несобственный интеграл 1-го рода. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема в собственном смысле в любой конечной его части $[a, A]$ $(\forall A > a)$. Предел интеграла $\int_a^A f(x)dx$ (конечный или бесконечный) при $A \to +\infty$ называют *несобственным интегралом 1-го рода* от функции $f(x)$ по полупрямой $[a, +\infty)$ и обозначают символом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx.$$

В случае, когда этот предел конечен, говорят, что *интеграл сходится*, а функцию $f(x)$ называют *интегрируемой* в бесконечном промежутке $[a, +\infty)$ (в несобственном смысле). Если же данный предел бесконечен или не существует, то про интеграл говорят, что он *расходится* (соответственно, функция $f(x)$ – неинтегрируема). В частности, если этот предел равен $+\infty$, то говорят, что интеграл расходится к $+\infty$. Бесконечно удалённая точка $x = +\infty$ (правый конец промежутка интегрирования) называется в этом случае *особой точкой* (особенностью 1-го рода). По определению считают, что если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, +\infty)$, то $\int_{+\infty}^a f(x)dx = -\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Интеграл от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ определяется как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ A\to+\infty}} \int_{A'}^A f(x)dx$$

при независимом стремлении $A \to +\infty$ и $A' \to -\infty$.

Пример. Пользуясь определением, выяснить, сходится ли несобственный интеграл (если сходится, то найти его значение):

$$\text{а)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}; \quad \text{б)} \int_0^{+\infty} \cos x dx.$$

Решение. а) Функция $\dfrac{dx}{1+x^2}$ интегрируема по Риману в любом конечном сегменте $[0, A]$ $(A > 0)$, причём $\int\limits_0^A \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\big|_0^A = \operatorname{arctg} A$. Так как для этого интеграла при $A \to +\infty$ существует конечный предел, равный $\dfrac{\pi}{2}$, то интеграл $\int\limits_0^A \dfrac{dx}{1+x^2}$ сходится и равен $\dfrac{\pi}{2}$.

б) Имеем

$$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A\to+\infty} \sin x\big|_0^A = \sin A.$$

Поскольку этот предел не существует, то данный интеграл расходится.

Несобственный интеграл 2-го рода. Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, определённую в конечном промежутке $[a, b]$ (за исключением, быть может, концов этого сегмента), но неограниченную на нём. Предположим, ради определённости, что на любом сегменте вида $[a, b-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < b-a)$ функция ограничена и собственно интегрируема, но является неограниченной в левой окрестности точки b. Точка b в этом случае, вне зависимости от того, определена функция в этой точке или нет, носит название *особой точки* 2-го рода. Предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ (конечный или бесконечный) при $\varepsilon \to +0$ называют *несобственным интегралом 2-го рода* от функции $f(x)$ от a до b и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

В случае, когда этот предел конечен, говорят, что интеграл *сходится*, а неограниченную функцию $f(x)$ называют *интегрируемой* в пределах от a до b (в несобственном смысле). Если же данный предел бесконечен или не существует, то про интеграл говорят, что он расходится, а функция $f(x)$ – неинтегрируема на данном промежутке. В частности, если этот предел равен $+\infty$, то говорят, что интеграл *расходится к* $+\infty$.

Так же, как и в случае с собственным интегралом, по определению будем считать, что если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, b]$, то

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

При исследовании несобственных интегралов на сходимость (как и при вычислении их по определению) выясняют сходимость интеграла в окрестности каждой из особых точек (если особая точка 2-го рода, то отдельно в левой и правой её окрестностях). Интеграл считается сходящимся, только если он сходится в каждой окрестности каждой своей особой точки. В противном случае интеграл считают расходящимся.

С помощью подстановки $t = 1/(b-x)$ рассмотренный выше несобственный интеграл 2-го рода с особенностью в точке b приводится к несобственному интегралу 1-го рода (при этом особенность 2-го рода преобразуется в результате указанной подстановки в особенность 1-го рода).

Так как несобственные интегралы суть пределы собственных, то их свойства во многом аналогичны свойствам собственных интегралов. В частности, несобственные интегралы обладают свойствами линейности и аддитивности.

Есть и отличия несобственных интегралов от собственных. Например, если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, +\infty)$, то она, вообще говоря, не обязательно ограничена на этом промежутке. Скажем, функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x}}$ интегрируема (в несобственном смысле) на бесконечном промежутке $(0, +\infty)$, однако, очевидно, эта функция не является ограниченной на нём.

Все основные понятия и теоремы интегрального исчисления обобщаются на случай несобственных интегралов. Рассмотрим, например, формулу Ньютона-Лейбница.

Теорема (*основная теорема интегрального исчисления для несобственных интегралов 1-го рода*). Пусть функция $f(x)$ определена в бесконечном промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема в собственном смысле на любом конечном сегменте $[a, A]$ $(A > a)$. Если для $f(x)$ при этом существует первообразная функция $F(x)$ на всём промежутке $[a, +\infty)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

Пример. Вычислить несобственный интеграл 1-го рода:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Решение. Очевидно, функция $F(x) = -\frac{1}{x}$ является первообразной функцией для функции $\frac{1}{x^2}$ на промежутке $[1, +\infty)$, поэтому по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{+\infty} = -0 + 1 = 1.$$

А вот как выглядит формула интегрирования по частям для несобственных интегралов 1-го рода.

Теорема (*интегрирование по частям несобственного интеграла 1-го рода*). Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на полуинтервале $[a, +\infty)$, и пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))$. Тогда из сходимости одного из интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx$ или $\int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx$ следует сходимость второго интеграла, причём справедливо равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x))\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)dx.$$

Для исследования сходимости несобственных интегралов используются, наряду с определением, различные признаки сходимости и некоторые другие возможности.

5 ЛЕКЦИЯ: Функции многих переменных. Дифференциальные уравнения

*«Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду,
а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!»*
Д. Пойа

Краткое содержание.

I. Понятие функции нескольких переменных. m-мерное евклидово пространство. ε-окрестность точки в m-мерном евклидовом пространстве в виде открытого шара. Область задания и множество значений функции. Поверхность уровня. Предел функции. Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Непрерывность функции (по совокупности переменных и по каждой переменной в отдельности). Основные свойства непрерывных функций (об арифметических операциях над непрерывными в данной точке функциями, о непрерывности сложной функции, об устойчивости знака непрерывной в данной точке функции, о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение, 1-я и 2-я теоремы Вейерштрасса).

Частные производные. Дифференцируемость. Дифференциал. Связь дифференцируемости с существованием всех частных производных 1-го порядка. Связь дифференцируемости с непрерывностью. Связь дифференцируемости с существованием касательной плоскости. Достаточные условия дифференцируемости в виде непрерывности частных производных 1-го порядка. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков. n-кратная дифференцируемость. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.

Понятие локального экстремума. Необходимое условие локального экстремума. Достаточное условие локального экстремума.

II. Понятие дифференциального уравнения. Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Основные понятия ОДУ: порядок уравнения, решение уравнения, интегральная кривая. Уравнения 1-го порядка, разрешённые относительно производной. Задача Коши. Теорема Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Общее и частные решения. ОДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными и метод их решения. ОДУ 2-го порядка, допускающие понижение порядка. Нахождение дифференциального уравнения по его общему решению.

Литература:

[1]. Разд. 4 (Интегральное исчисление и дифференциальные уравнения). Гл. 12 (Дифференциальные уравнения). Разд. 6 (Функции нескольких переменных). Гл. 15 (Функции нескольких переменных).

[2] Часть 2 (Математический анализ функций нескольких переменных). Гл. 11 (Предел и непрерывность функций нескольких переменных). Гл. 12 (Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных). Гл. 15 (Обыкновенные дифференциальные уравнения)

[3] Гл. 15 (Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных). Гл. 18 (Дифференциальные уравнения).

5.1 Понятие m-мерного координатного пространства. Последовательность точек и её предел

Назовём *m-мерным координатным пространством* множество всевозможных упорядоченных наборов действительных чисел: $(x_1, x_2, ..., x_m)$. Для обозначения m-мерного координатного пространства воспользуемся символом A^m. Запись $M(x_1, x_2, ..., x_m)$ означает, что точка M имеет координаты $x_1, x_2, ..., x_m$. В частности, при $m = 1$ получаем числовую прямую, при $m = 2$ – координатную плоскость, при $m = 3$ – трёхмерное координатное пространство.

Координатное пространство A^m назовём m-мерным *евклидовым пространством*, если между двумя любыми точками $M'(x'_1, x'_2, ..., x'_m)$ и $M''(x''_1, x''_2, ..., x''_m)$ этого пространства определено расстояние, обозначаемое $\rho(M', M'')$ и выражаемое соотношением

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + ... + (x'_m - x''_m)^2}.$$

m-мерное евклидово пространство обычно обозначают символом $\mathbb{R}^m$ (или $\mathbb{E}^m$).

Открытым m-мерным шаром радиуса R с центром в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ назовём множество всех точек M пространства $\mathbb{R}^m$, которые удовлетворяют неравенству $\rho(M, M_0) < R$ (т.е. расположены от точки M_0 на расстоянии, меньшем R). Множество всех точек M пространства $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющих нестрогому неравенству $\rho(M, M_0) \leq R$, назовём *замкнутым m-мерным шаром* радиуса R с центром в точке M_0. Соответственно, множество всех точек $M \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих равенству $\rho(M, M_0) = R$, называется *m-мерной сферой* радиуса R с центром в точке M_0. Открытый m-мерный шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке M_0 будем называть *ε-окрестностью* точки M_0.

Аналогично тому как это делалось на множестве действительных чисел, в m-мерном пространстве вводятся понятия внутренней, внешней, граничной, изолированной и предельной точек множества, а также понятия открытого и замкнутого множеств.

По отношению ко множеству $\{M\}$ выделяют два вида точек: предельные и изолированные точки. *Изолированной* называется такая точка $M \in \{M\}$, у которой есть окрестность, не имеющая с $\{M\}$ других общих точек, кроме M. Точка M' (она может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $\{M\}$) называется *предельной точкой этого множества*, если в любой (сколь угодно малой) окрестности этой точки находится хотя бы одна точка из множества $\{M\}$, отличная от M. *Внутренняя точка множества* есть точка, входящая в данное множество вместе с некоторой своей окрестностью. Множество точек пространства $\mathbb{R}^m$ называется *открытым*, если любая точка этого множества является его внутренней точкой. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество точек пространства $\mathbb{R}^m$ называется *ограниченным*, если найдётся m-мерный шар, содержащий все точки этого множества. Множество $\{M\}$ евклидова пространства называется *компактом*, если оно замкнуто и ограничено.

Последовательность точек в пространстве $\mathbb{R}^m$ и её предел. Пусть каждому натуральному числу n ставится в соответствие точка M_n евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Возникающий при этом пронумерованный ряд точек $M_1, M_2, ..., M_n, ...$ будем называть *последовательностью* точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ и обозначать $\{M_n\}$.

Последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ называется *сходящейся*, если существует точка A пространства $\mathbb{R}^m$ такая, что для любого положительного числа ε можно указать отвечающий ему номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при любом $n \geq N$ выполняется неравенство $\rho(M_n, A) < \varepsilon$. При этом точка A называется *пределом последовательности* $\{M_n\}$. Используемые обозначения:

$$\lim_{n \to +\infty} M_n = A, \quad \text{или} \quad M_n \to A \text{ при } n \to +\infty.$$

Теорема (*необходимое и достаточное условие сходимости последовательности точек*). Последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ сходится к точке A этого пространства тогда и только тогда, когда числовые последовательности $\{x_1^{(n)}\}$, $\{x_2^{(n)}\}$,...,$\{x_m^{(n)}\}$ координат точек M_n сходятся соответственно к координатам $a_1, a_2, ..., a_m$ точки A.

Ограниченные последовательности точек. Понятие подпоследовательности. Теорема Больца́но-Вейерштра́сса. Последовательность $\{M_n\}$ точек евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ называется *ограниченной*, если существует такое число C, что для всех натуральных номеров n выполняется неравенство $\rho(M_n, O) \leq C$, где O – точка, все координаты которой равны 0.

Если $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ – произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то будем называть последовательность точек $M_{n_1}, M_{n_2}, ..., M_{n_k}, ...$ *подпоследовательностью* последовательности точек $\{M_n\}$ и обозначать $\{M_{n_k}\}$.

Теорема (*Больцано-Вейерштрасса*). Из любой ограниченной последовательности $\{M_n\}$ точек m-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

5.2 Понятие функции нескольких переменных

Понятие функции m переменных. Если каждой точке M, принадлежащей некоторому множеству $\{M\} \in \mathbb{R}^m$, ставится в соответствие действительное число u, то говорят, что на множестве $\{M\}$ задана функция $u = u(M)$, или $u = f(M)$. При этом множество $\{M\}$ называется *областью определения* функции $u = f(M)$. Число u называют *значением функции f в точке M*. Совокупность всех значений функции $u = f(M)$ называют *множеством значений* этой функции. Наряду с кратким обозначением $u = f(M)$ используют также обозначение $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Пример 1. Найти область определения и множество значений функции двух переменных $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение. Область определения задаётся неравенством $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, или $x^2 + y^2 \leq 2^2$, и определяет замкнутый круг радиуса 2 с центром в точке $(0, 0)$. В силу неравенства $0 \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq 2$ множеством значений данной функции является отрезок $[0, 2]$. При этом значение 0 достигается, например, в точке $(0, 2)$, а значение 2 – в точке $(0, 0)$.

Пример 2. Найти область определения функции двух переменных $u = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$ и нарисовать её на плоскости Oxy.

Решение. Область определения задаётся так: $D(u) = \{(x,y) \,\big|\, |x| \leq 1,\ |y| \geq 1\}$. Изобразите её самостоятельно.

Поверхность уровня. Пусть в пространстве $Oxyz$ имеется область D, в которой задана функция $u = u(x,y,z)$.

В этом случае говорят, что в области D задано *скалярное поле*. Если, например, $u(x,y,z)$ означает температуру в точке (x,y,z), то говорят, что задано скалярное поле температур. Если область D заполнена жидкостью или газом и $u(x,y,z)$ означает давление в точке (x,y,z), то имеется скалярное поле давлений и т.д.

Рассмотрим точки области D, в которых функция $u(x,y,z)$ имеет (сохраняет) постоянное значение C:

$$u(x,y,z) = C.$$

Совокупность всех таких точек образует в трёхмерном пространстве некоторую поверхность. Если возьмём другое значение C, то получим другую поверхность. Эти поверхности называются *поверхностями уровня* функции $u = u(x,y,z)$.

Если функция $u(x,y,z)$ означает температуру в точке (x,y,z), то поверхности уровня называют *изотермами*, а если $u(x,y,z)$ означает давление в точке (x,y,z), то для поверхностей уровня используют термин *изобары*.

В случае функций двух переменных поверхности уровня называются *линиями уровня*.

Пример 1. Найти линии уровня функции $u(x,y) = x^2 + y^2$.

Решение. Приравняв функцию к произвольной (неотрицательной) константе C, получим уравнение линий уровня: $x^2+y^2 = C$. Очевидно, это будет семейство концентрических (с общим центром) окружностей с центром в точке $(0,0)$ и радиусом $\sqrt{C}$.

Пример 2. Найти линии уровня функции $u(x,y) = xy$.

Решение. Линии уровня в данном случае задаются уравнением $xy = C$, которое при $C \neq 0$ можно переписать в виде $y = \dfrac{C}{x}$. Видно, что это будет семейство гипербол с общим центром в точке начала координат. Значению константы $C = 0$ соответствуют две прямые $x = 0$ и $y = 0$.

Пример 3. Найти поверхности уровня функции $u(x,y,z) = x + y + z$.

Решение. Поверхности уровня задаются уравнением $x+y+z = C$, которое определяет семейство параллельных плоскостей.

Пример 4. Найти поверхности уровня функции $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение. Поверхности уровня задаются уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = C$, которое при любом положительном C определяет концентрические (с общим центром) сферы радиуса $\sqrt{C}$.

5.2.1 Предел функции нескольких переменных

Предел функции m переменных. Рассмотрим функцию $u = f(M)$, определённую на множестве $\{M\}$ точек m-мерного евклидова пространства, и точку $M_0(x_1^0, ..., x_m^0) \in \mathbb{R}^m$, быть может и не принадлежащую множеству $\{M\}$, но обладающую тем свойством, что в любой δ-окрестности точки M_0 содержится хотя бы одна точка множества $\{M\}$, отличная от M_0 (т.е. M_0 является предельной точкой множества $\{M\}$).

Опр. 1 (*предел функции в точке M_0 по Гейне*). Число b называется *пределом функции $u = f(M)$ в точке M_0* (или при M, стремящемся к M_0), если для любой сходящейся к M_0 последовательности $\{M_n\}$ точек множества $\{M\}$, все элементы которой отличны от M_0 ($M_n \neq M_0$), соответствующая числовая последовательность $\{f(M_n)\}$ значений функции сходится к числу b.

При этом используют обозначения:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = b, \quad \text{или} \quad f(M) \to b \ \text{ при } \ M \to M_0.$$

Так как сходимость M к M_0 покомпонентная, то предел можно записать в развёрнутом виде m-кратного предела

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \cdots \\ x_m \to x_m^0}} f(x_1, x_2, ..., x_m) = b.$$

где переменные x_i одновременно и независимо друг от друга стремятся к своим пределам x_i^0, $i = \overline{1, m}$.

Опр. 1* (*предел функции в точке M_0 по Коши*). Число b называется *пределом функции $u = f(M)$ в точке M_0* (или при $M \to M_0$), если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для любой точки M из множества $\{M\}$, удовлетворяющей условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, справедливо неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Эти определения эквивалентны.

Для функций многих переменных наряду с понятием кратного предела, только что введённого выше, существует понятие повторного предела, когда все переменные устремляются к своим предельным значениям не независимо и одновременно, а по очереди – одна за другой. Например, для функций двух переменных $u = f(x, y)$ наряду с двойным пределом $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ существуют два повторных предела

$$\lim_{x \to x_0} \big(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \big) \quad \text{и} \quad \lim_{y \to y_0} \big(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \big).$$

В повторных пределах вначале всегда вычисляется «внутренний» предел, а уже затем находят «внешний» предел. Эти три предела не обязательно одновременно существуют и равны друг другу, поэтому, например, сводить задачу вычисления двойного предела к вычислению одного из повторных в общем случае нельзя. Это демонстрирует следующий пример.

Пример. Показать, что для функции $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ оба повторных предела в точке $(0, 0)$ существуют и равны нулю: $\lim\limits_{x \to 0} (\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)) = \lim\limits_{y \to 0} (\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)) = 0$, а двойной предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ не существует.

Решение. Вычислим первый из повторных пределов. Так как при $x \neq 0$ имеем $\lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = 0$, то $\lim\limits_{x \to 0} (\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)) = 0$. Аналогично доказывается, что второй из повторных пределов также равен нулю. Чтобы показать, что двойной предел не существует, рассмотрим две последовательности точек: $M'_k(\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ и $M''_k(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k})$. Очевидно, что обе последовательности сходятся к точке $(0, 0)$, но при этом соответствующие последовательности значений функции сходятся при $k \to +\infty$ к различным предельным значениям: $f(M'_k) \to 1$, $f(M''_k) \to 0$, что противоречит единственности предела.

Введём понятие предела функции при $M \to \infty$. Для этого предположим, что множество $\{M\}$, на котором задана функция $u = f(M)$, для любого (сколь угодно большого) $\delta > 0$ имеет хотя бы один элемент M, лежащий вне шара радиуса δ с центром в точке $O(0, 0, ..., 0)$. Ограничимся понятием соответствующего предела по Коши.

Опр. 2 (*предел функции при $M \to \infty$ по Коши*). Число b называется *пределом функции $u = f(M)$* при $M \to \infty$, если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех точек M из множества $\{M\}$, удовлетворяющих условию $\rho(M, O) > \delta$, справедливо неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$. Этот факт обозначают следующим образом:

$$\lim_{M\to\infty} f(M) = b, \quad \text{или} \quad f(M) \to b \ \text{ при } \ M \to \infty.$$

Сформулируем, наконец, понятие бесконечного предела в точке.

Опр. 3 (*бесконечного предела функции в точке M_0 по Коши*). Говорят, что функция $u = f(M)$ имеет *бесконечный предел* при $M \to M_0$, если для любого положительного числа E найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для всех точек $M \in \{M\}$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, справедливо неравенство $|f(M)| > E$. Обозначения:

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = \infty, \quad \text{или} \quad f(M) \to \infty \ \text{ при } \ M \to M_0.$$

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

Решение. Сделаем замену $t = xy$ и воспользуемся 1-м замечательным пределом $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$. Получим, что искомый предел равен 1.

Пример 2. Существует ли предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$?

Решение. Этот предел не существует. В самом деле, рассмотрим две последовательности точек $M_n' = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ и $M_n'' = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$. Обе последовательности сходятся к точке $(0,0)$ при $n \to +\infty$. Вместе с тем, соответствующие последовательности значений функции сходятся к различным значениям:

$$f(M_n') = \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 1 \to 1, \quad f(M_n'') = \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \to 0,$$

что противоречит определению предела по Гейне.

Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Пусть две функции $u = f(M)$ и $u = g(M)$ заданы на одном и том же множестве $\{M\}$ и имеют в точке M_0 пределы, соответственно равные b и c. Тогда функции $f(M) + g(M)$, $f(M) - g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $f(M)/g(M)$ также имеют в точке M_0 пределы, соответственно равные $b + c$, $b - c$, $b \cdot c$, b/c (в случае частного дополнительно требуем $c \neq 0$).

Бесконечно малые и бесконечно большие функции m переменных. Функция $u = f(M)$ называется *бесконечно малой в точке* M_0 (или при $M \to \infty$), если $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = 0$ (соответственно $\lim\limits_{M\to\infty} f(M) = 0$). Функция $u = f(M)$ называется *бесконечно большой* *в точке* M_0 (при $M \to \infty$), если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = \infty$ (соответственно $\lim\limits_{M \to \infty} f(M) = \infty$).

Пример 3. Является ли бесконечно малой функция $u = \dfrac{1}{x^2 + y^4}$ при $x \to \infty$, $y \to \infty$? Является ли та же функция бесконечно большой при $x \to 0$, $y \to 0$?

Решение. Так как предел $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{1}{x^2 + y^4} = 0$, то функция является бесконечно малой при $x \to 0$, $y \to 0$. С другой стороны, поскольку $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{1}{x^2 + y^4} = \infty$, то функция является бесконечно большой при $x \to 0$, $y \to 0$.

5.2.2 Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть M_0 – некоторая точка $\mathbb{R}^m$, принадлежащая области определения $\{M\}$ функции $u = f(M)$ и являющаяся одновременно предельной точкой для множества $\{M\}$. Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной в точке* M_0, если предел этой функции в точке M_0 существует и равен значению функции $f(M_0)$ в этой точке:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0), \quad \text{или} \quad f(M) \to f(M_0) \text{ при } M \to M_0.$$

Раскрывая понятие предела, сформулируем эти определения на языке последовательностей (по Ге́йне) и на языке «$\varepsilon - \delta$» (по Коши́).

Опр. 1 (*непрерывности функции в данной точке по Гейне*). Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной в точке* M_0, если для любой сходящейся к M_0 последовательности $\{M_n\}$ точек множества $\{M\}$ соответствующая последовательность $\{f(M_n)\}$ значений этой функции сходится к числу $f(M_0)$.

Опр. 1* (*непрерывности функции в данной точке по Коши*). Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной в точке* M_0, если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число δ такое, что для любой точки M из множества $\{M\}$, удовлетворяющей условию $\rho(M, M_0) < \delta$, справедливо неравенство $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.

Эти определения эквивалентны.

Обратим внимание, что непрерывность функции в точке M_0 означает возможность предельного перехода под знаком функции:

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(\lim_{M\to M_0} M).$$

Опр. 2 (*непрерывности функции на множестве*). Функция $u = f(M)$, определённая на множестве $\{M\}$, называется *непрерывной на этом множестве*, если она непрерывна в каждой точке множества $\{M\}$.

Точки пространства $\mathbb{R}^m$, в которых нарушается свойство непрерывности, называются *точками разрыва* функции.

Пример 1. Функция $u = xy$ является непрерывной на плоскости $\mathbb{R}^2$, а функция $u = \dfrac{1}{xy}$ разрывна в точках, у которых или $x = 0$, или $y = 0$, т.е. в точках, лежащих на координатных осях.

Пример 2. Найти точки разрыва функции $u(x, y) = \dfrac{xy}{x+y}$.

Решение. Функция не определена при $x + y = 0$, следовательно, точки разрыва заполняют собой прямую $y = -x$.

Мы сформулировали понятие непрерывности функции в точке *по совокупности* всех переменных. Однако для функций многих переменных существует понятие непрерывности по каждой из переменных в отдельности. Приведём это определение и покажем, как связаны между собой непрерывность по совокупности всех переменных с непрерывностью по каждой из переменных.

Непрерывность функции m переменных по каждой из переменных. Введём для функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ понятие непрерывности в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ по одной из переменных при фиксированных значениях остальных переменных. Определим, например, непрерывность по k-й переменной x_k ($1 \le k \le m$). Зафиксируем в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ значения всех переменных $x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_m$, кроме переменной x_k, равными соответствующим координатам x_1^0, $x_2^0, ..., x_{k-1}^0, x_{k+1}^0, ..., x_m^0$ точки M_0, оставив свободной только переменную x_k. Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ называется *непрерывной в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ по переменной x_k*, если

$$\lim_{x_k\to x_k^0} f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, ..., x_m^0) = f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, ..., x_m^0).$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\Delta x_k\to 0} f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0+\Delta x_k, x_{k+1}^0, ..., x_m^0) = f(x_1^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, ..., x_m^0),$$

где Δx_k – приращение по k-му аргументу (k-й переменной).

Рассмотрим так называемое *частное приращение* функции по k-й переменной в точке M_0:

$$\Delta_k u = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, ..., x_m^0) -$$

$$- f(x_1^0, x_2^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, ..., x_m^0).$$

Тогда последнее определение можно сформулировать в терминах частного приращения: функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ по переменной x_k, если $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \Delta_k u = 0$.

Например, для функции двух переменных $u = f(x, y)$ непрерывность в точке $M_0(x_0, y_0)$ по совокупности переменных означает, что с какой бы стороны и по какой бы траектории точка $M(x, y)$ на плоскости Oxy ни приближалась к точке M_0, её предел существует и равен одному и тому же числу – значению функции $f(x_0, y_0)$. Непрерывность же по переменной x, например, означает лишь непрерывность вдоль оси Ox (точка $M(x, y_0)$ лежит на прямой $y = y_0$ и может приближаться к точке $M_0(x_0, y_0)$ лишь справа или слева).

В общем случае из непрерывности функции в заданной точке (по совокупности переменных) следует непрерывность этой функции по каждой из переменных. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: из непрерывности функции по каждой из переменных не следует, вообще говоря, непрерывность по совокупности всех переменных.

Итак, непрерывность по переменной x в точке (x_0, y_0) означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$, а непрерывность в этой точке по переменной y означает, что $\lim\limits_{y \to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$.

Пример. Доказать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывна в точке $(0, 0)$ по каждой из переменных x и y, но не является непрерывной по совокупности всех переменных в этой точке.

Решение. 1) Исследуем функцию на непрерывность в точке $(0, 0)$ *по переменной* x. Для этого надо проверить условие непрерывности: $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = f(0, 0)$, т.е. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0 = f(0, 0)$. Поскольку условие выполняется, то это означает, что функция непрерывна по переменной x.

Теперь исследуем функцию на непрерывность в точке $(0,0)$ *по переменной* y. Для этого надо проверить условие $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = f(0,0)$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0\cdot y}{0^2+y^2} = 0 = f(0,0)$, что означает непрерывность функции по переменной y.

2) Покажем, что, тем не менее, функция не будет непрерывной в указанной точке. В самом деле, выберем в качестве траектории, по которой точка M приближается к $(0,0)$, прямую вида $y = x$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0), \text{ т.е. функция разрывна в точке } (0,0).$$

Основные свойства непрерывных функций m **переменных** во многом остаются теми же, что и у функций одной переменной.

Теорема 1 (*арифметические операции над непрерывными в данной точке функциями*). Пусть две функции $u = f(M)$ и $u = g(M)$ заданы на одном и том же множестве $\{M\} \in \mathbb{R}^m$ и непрерывны в некоторой точке M_0 этого множества. Тогда функции $f(M)+g(M)$, $f(M)-g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$, $f(M)/g(M)$ также непрерывны в точке M_0 (в случае частного дополнительно требуем $g(M_0) \neq 0$).

Для формулировки следующей теоремы нам понадобится понятие сложной функции нескольких переменных. Пусть функции

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k), \quad i = \overline{1,m},$$

заданы на множестве $\{N\}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^k$. Каждой точке $N(t_1, t_2, ..., t_k)$ множества $\{N\}$ они ставят в соответствие точку $M(x_1, x_2, ..., x_m)$. Пусть на множестве $\{M\}$ всех таких точек M определена функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$. В этом случае принято говорить, что на множестве $\{N\}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^k$ определена *сложная функция* $u = f(\varphi_1(t_1, ..., t_k), ..., \varphi_m(t_1, ..., t_k))$ переменных $t_1, t_2, ..., t_k$.

Теорема 2 (*о непрерывности сложной функции*). Пусть функции $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k)$, $i = \overline{1,m}$, непрерывны в точке $N(t_1, t_2, ..., t_k)$, а функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ непрерывна в соответствующей точке $M(x_1, x_2, ..., x_m)$, где $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k)$, $i = \overline{1,m}$. Тогда сложная функция $u = f(\varphi_1(t_1, ..., t_k), ..., \varphi_m(t_1, ..., t_k))$ непрерывна в точке $N(t_1, t_2, ..., t_k)$.

Теорема 3 (*об устойчивости знака непрерывной в данной точке функции*). Если функция $u = f(M)$ непрерывна в точке M_0 евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ и если $f(M_0) \neq 0$, то существует такая δ-окрестность точки M_0, в пределах которой $f(M)$ не обращается в нуль и имеет знак, совпадающий со знаком $f(M_0)$.

Теорема 4 (*о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение*). Пусть функция $u = f(M)$ непрерывна во всех точках свя́зного[1] множества $\{M\}$, причём $f(M_1)$ и $f(M_2)$ – значения функции в точках M_1 и M_2 этого множества. Пусть, далее, C – число, заключённое между $f(M_1)$ и $f(M_2)$. Тогда на любой непрерывной кривой, соединяющей точки M_1 и M_2 и целиком располагающейся в $\{M\}$, найдётся точка N такая, что $f(N) = C$.

Теорема 5 (*1-я теорема Вейерштрасса*). Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве (т.е. компакте) $\{M\}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, то она ограничена на этом множестве.

Для формулировки 2-й теоремы Вейерштрасса необходимо ввести понятие точных граней функции нескольких переменных. *Точной верхней гранью* функции $u = f(M)$ на множестве $\{M\}$ называется такое число $\overline{u}$, обозначаемое $\sup\limits_{M\in\{M\}} f(M)$ (читается «супре́мум»), которое удовлетворяет двум требованиям:

1) $f(M) \leq \overline{u}$ для всех точек M множества $\{M\}$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся хотя бы одна точка M из множества $\{M\}$, для которой $f(M) > \overline{u} - \varepsilon$.

Аналогично определяется точная нижняя грань $\underline{u} = \inf\limits_{M\in\{M\}} f(M)$ (читается «инфи́нум») функции $u = f(M)$ на множестве $\{M\}$.

Можно сказать иначе: точной верхней (точной нижней) гранью функции $u = f(M)$ на множестве $\{M\}$ называется наименьшая (соответственно, наибольшая) из верхних (соответственно, нижних) граней этой функции на заданном множестве.

Теорема 6 (*2-я теорема Вейерштрасса*). Если функция $u = f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $\{M\}$, то она достигает на этом множестве своих точных нижней и верхней граней.

[1]Множество $\{M\}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ называется *свя́зным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

5.2.3 Дифференцируемость функции нескольких переменных

Понятие частных производных функции m переменных. Пусть M_0 – внутренняя точка множества $\{M\}$ (область определения функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$. Зафиксировав в этой точке все переменные, кроме x_k, дадим приращение Δx_k этому аргументу и рассмотрим отвечающее ему частное приращение функции по этой переменной:

$$\Delta_k u = f(x_1^0, x_2^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, ..., x_m^0) -$$
$$- f(x_1^0, x_2^0, ..., x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, ..., x_m^0).$$

Определение (*частной производной по переменной x_k*). Если существует конечный предел разностного отношения

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k},$$

то он называется *частной производной* (1-го порядка) функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ в точке M_0 по переменной x_k и обозначается одним из следующих способов:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0),\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{M=M_0},\ u'_{x_k}(M_0),\ f'_{x_k}(M_0).$$

Например, частные производные функции 2-х переменных $u = f(x, y)$ определяются по правилу

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$
$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ показывают скорости изменения функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) вдоль координатных осей Ox и, соответственно, Oy.

Частная производная по аргументу x_k представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x_k при фиксированных значениях остальных переменных, и её вычисление в большинстве случаев производится по обычным правилам вычисления производной функции одной переменной.

Пример 1. Вычислить частные производные функции $u = x^2 y + \sin(x + 5y)$ в произвольной точке (x, y).

Решение. При вычислении частной производной по x считаем y фиксированным параметром (числом) и получаем функцию только одной переменной – x, по которой дифференцируем обычным образом (как функцию одной переменной):

$$f'_x = 2xy + \cos(x + 5y), \quad f'_y = x^2 + 5\cos(x + 5y).$$

В тех случаях, когда обычные правила дифференцирования не дают результата, используют определения частных производных.

Пример 2. Найти частные производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, если $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$.

Решение. Попробуем вначале продифференцировать по переменной x обычным способом: $f'_x(x,y)=\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x})'_x=\sqrt[3]{y}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Но как тогда посчитать $f'_x(0,0)$? Очевидно, этой формулой нельзя пользоваться в точке $(0,0)$. В этом случае вычислим производные $f'_x(0,0)$ и $f'_y(0,0)$, используя определения этих производных:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x\cdot 0}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot\Delta y}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

Заметим, что из существования в данной точке у функции всех частных производных, вообще говоря, не следует непрерывности функции в данной точке.

Например, выше мы доказали, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

не является непрерывной в точке $(0,0)$. Покажем, что, тем не менее, у этой функции существуют обе частные производные. В самом деле, найдём их, используя определение частных производных:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

Аналогично, $f'_y(0,0)=0$.

Понятие дифференцируемости функции m переменных. Дифференциал. Пусть M_0 – внутренняя (предельная) точка области определения $\{M\}$ функции $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$. Дадим в этой точке всем переменным небольшие ненулевые приращения $\Delta x_1,...,\Delta x_m$ и рассмотрим отвечающее им *полное приращение* функции:

$$\Delta u(M_0)=f(x_1^0+\Delta x_1,...,x_m^0+\Delta x_m)-f(x_1^0,...,x_m^0).$$

Опр. 1. Функция $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ называется *дифференцируемой* в точке M_0, если её полное приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta u(M_0)=A_1\Delta x_1+...+A_m\Delta x_m+\alpha_1\Delta x_1+...+\alpha_m\Delta x_m,$$

где $A_1, ..., A_m$ – некоторые зависящие от M_0, но не зависящие от $\Delta x_1, ..., \Delta x_m$ числа, $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, ..., \Delta x_m)$, $i = \overline{1, m}$, – бесконечно малые при $\Delta x_1 \to 0$,...,$\Delta x_m \to 0$ функции.

Последнее соотношение называется *условием дифференцируемости* функции в данной точке. Его можно записать в другом, более простом, виде. Для этого введём обозначение:

$$\rho(\Delta x_1, ..., \Delta x_m) = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + ... + (\Delta x_m)^2}.$$

Можно показать, что $\alpha_1 \Delta x_1 + ... + \alpha_m \Delta x_m = o(\rho)$ при $\Delta x_1 \to 0$, ..., $\Delta x_m \to 0$, и тогда условие дифференцируемости в точке M_0 может быть переписано в виде

$$\Delta u(M_0) = A_1 \Delta x_1 + ... + A_m \Delta x_m + o(\rho).$$

Сумма $A_1 \Delta x_1 + ... + A_m \Delta x_m$ представляет собой главную, линейную относительно приращений аргументов $\Delta x_1, ..., \Delta x_m$ часть полного приращения функции и называется *дифференциалом* (1-го порядка) функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ в точке M_0. Для дифференциала принято обозначение: $du(M_0)$, или $df(M_0)$.

Теорема 1 (*связь между дифференцируемостью и существованием в точке частных производных*). Если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дифференцируема в точке M_0, то в этой точке существуют частные производные по всем аргументам, причём $A_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(M_0)$, $i = \overline{1, m}$.

Следствие. Условие дифференцируемости функции в точке M_0 тогда можно переписать в виде

$$\Delta u(M_0) = f'_{x_1}(M_0) \Delta x_1 + ... + f'_{x_m}(M_0) \Delta x_m + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + ... + \Delta x_m^2}$, а дифференциал, соответственно, в виде

$$du(M_0) = f'_{x_1}(M_0) \Delta x_1 + ... + f'_{x_m}(M_0) \Delta x_m.$$

Так же как и в случае с функциями одной переменной, под дифференциалом dx_i независимой переменной x_i будем понимать приращение независимой переменной Δx_i. Это позволяет нам переписать формулу для дифференциала 1-го порядка в окончательном виде:

$$du(M_0) = f'_{x_1}(M_0) dx_1 + ... + f'_{x_m}(M_0) dx_m.$$

Например, для функции $z = f(x, y)$ выражение для дифференциала в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$dz(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy,$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ – частные производные по x и y, вычисленные в этой точке.

Среди важнейших свойств дифференцируемых функций можно выделить следующее, отражающее связь между дифференцируемостью и непрерывностью (аналогичное свойство присуще, как мы помним, и функциями одной переменной).

Теорема 2 (*связь между дифференцируемостью и непрерывностью в точке*). Если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дифференцируема в точке M_0, то она непрерывна в этой точке.

Геометрический смысл дифференцируемости функции в точке. Сформулируем понятие касательной плоскости к поверхности. Плоскость П, проходящая через точку M_0 поверхности, называется *касательной плоскостью* в этой точке к поверхности, если угол между этой плоскостью и секущей (прямой), проходящей через точку M_0 и любую точку M поверхности, стремится к нулю, когда точка M стремится к точке M_0.

Теорема 1(*связь дифференцируемости с существованием касательной плоскости*). Если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$, то поверхность, задаваемая этой функцией (т.е. график функции), имеет в точке $(x_1^0, ..., x_m^0, u^0)$, где $u^0 = f(x_1^0, ..., x_m^0)$, касательную плоскость, причём уравнение этой касательной плоскости имеет вид:

$$u - u^0 = f'_{x_1}(M_0)(x - x_1) + ... + f'_{x_m}(M_0)(x - x_m).$$

Геометрический смысл дифференциала для функций двух переменных. Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$, которая дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$. Полное приращение функции в этой точке $\triangle z(x_0, y_0) = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$ геометрически представляет собой приращение аппликаты z функции $z = f(x, y)$, отвечающее приращениям $\triangle x$ и $\triangle y$ независимых переменных x и y. А дифференциал функции dz есть приращение аппликаты касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в данной точке.

Следует отметить, что для функции одной переменной $y = f(x)$ существования конечной производной $f'(x_0)$ было достаточно для дифференцируемости в точке x_0, т.е. представления приращения функции в точке x_0 в виде $\triangle y(x_0) = dy(x_0) + \alpha(\triangle x)\triangle x$. Более того, это эквивалентные утверждения: из существования конечной производной сдедует дифференцируемость (существование дифференциала), и наоборот.

Для функций нескольких переменных дело обстоит иначе: существование всех частных производных в точке M_0 необходимо, но не достаточно для дифференцируемости функции в данной точке: функция может иметь в точке частные производные по всем переменным, но при этом не быть в ней дифференцируемой. Следующая теорема приводит *достаточные условия* дифференцируемости функции в точке.

Теорема 2 (*достаточные условия дифференцируемости*). Если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ имеет частные производные 1-го порядка по всем аргументам в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$, причём все эти частные производные непрерывны в самой точке M_0, то указанная функция дифференцируема в точке M_0.

Арифметические операции над дифференциалами. Для дифференцируемых функций нескольких переменных, как и для функций одной переменной, можно находить дифференциалы суммы, разности, произведения и частного двух дифференцируемых функций. А именно, если две функции $u = u(M)$, $v = v(M)$ дифференцируемы в точке M, то их сумма, разность, произведение и частное также дифференцируемы в точке M (частное при условии $v(M) \neq 0$), причём

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \;\; d(uv) = vdu + udv, \;\; d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \;\; (v \neq 0).$$

Отметим, что существуют правила дифференцирования сложных функций нескольких переменных, пользуясь которыми можно находить все частные производные, а также дифференциал сложной функции.

Производная по произвольному направлению. Наличие более одной переменной в аргументе функции обобщает и, зачастую, усложняет многие понятия. В случае с дифференцируемостью это приводит, в частности, к тому, что возникает новое (в сравнении с функциями одной переменной) понятие – дифференцирование в любом направлении. Для простоты остановимся на функциях двух переменных.

Пусть функция двух независимых переменных $u = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy и дифференцируема в точке M_0. Рассмотрим всевозможные лучи, выходящие из точки M_0 и лежащие в плоскости Oxy. Понятно, что таких лучей – бесконечно много. Выберем произвольный луч, определяющий некоторое направление. Пусть $\vec{e}$ – единичный вектор в выбранном направлении. Его координаты имеют вид $(\cos\alpha, \cos\beta)$, где числа $\cos\alpha, \cos\beta$ называют *направляющими косинусами*, причём $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, а α и β – углы, которые образует вектор $\vec{e}$, соответственно, с положительными направлениями осей Ox, Oy.

Возьмём на прямой, содержащей луч $\vec{e}$, произвольную точку M, отличную от точки M_0, обозначив длину вектора $\overrightarrow{M_0M}$ через l. Очевидно, что этот вектор имеет координаты $\overrightarrow{M_0M}(l\cos\alpha, l\cos\beta)$. С другой стороны, если координаты точки M равны (x, y), то вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $(x - x_0, y - y_0)$. Сопоставляя полученные выражения для координат вектора $\overrightarrow{M_0M}$, приходим к равенствам

$$x = x_0 + l\cos\alpha, \quad y = y_0 + l\cos\beta.$$

Это означает, что на прямой, проходящей через точку M_0 и определяемой единичным вектором $\vec{e}$, функция $u = f(x, y)$ представляет собой сложную функцию одной независимой переменной l вида $u = f(x_0 + l\cos\alpha, y_0 + l\cos\beta)$.

Опр. Производную этой сложной функции по переменной l, взятую в точке $l = 0$, назовём *производной* функции $u = f(x, y)$ в точке M_0 *по направлению вектора* $\vec{e}$ и будем обозначать символом $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0)$.

Дифференцируя сложную функцию, получаем формулу для вычисления производной в направлении единичного вектора $\vec{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta.$$

Замечание. Если единичный вектор $\vec{e}$, задающий направление дифференцирования, совпадает с единичным вектором $\vec{i} = \{1, 0\}$, направленным вдоль оси Ox, то $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$ превращается в обычную частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$, а если вектор $\vec{e}$ совпадает с вектором $\vec{j} = \{0, 1\}$ (орт, или вектор единичной длины вдоль оси Oy), то производная в направлении этого вектора будет обычной частной производной по переменной y: $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Физический смысл производной по заданному направлению: производная $\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}$ характеризует *скорость изменения функции в направлении вектора* $\vec{e}$.

Градиент. *Градиентом* функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ называется вектор частных производных

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0), ..., \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0) \right\}.$$

Для функции двух переменных, соответственно, имеем:

$$\operatorname{grad} u(x_0, y_0) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \right\}.$$

Ясно, что если функция дифференцируема в точке M_0, то у неё в этой точке существует градиент. Для обозначения градиента наряду с обозначением $\operatorname{grad} u(x_0, y_0)$ также используется обозначение: $\nabla u(M_0)$, где символический вектор

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}$$

имеет название оператора «набла».

Полученное выше выражение для производной по направлению можно переписать в виде скалярного произведения[1] градиента и единичного вектора, задающего направление дифференцирования:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0) = (\vec{e}, \operatorname{grad} u(M_0)).$$

Кстати, первый дифференциал с помощью скалярного произведения может быть представлен в виде $du(M_0) = (\operatorname{grad} u(M_0), \overrightarrow{dx})$, где $\overrightarrow{dx} = \{dx_1, ..., dx_m\}$.

Воспользовавшись векторным неравенством Коши-Буняковского $|(\vec{a}, \vec{b})| \le |\vec{a}||\vec{b}|$, получим

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0) \right| \le |\vec{e}||\operatorname{grad} u(M_0)| = |\operatorname{grad} u(M_0)|.$$

Отсюда приходим к следующим важным свойствам градиента:

[1] Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}\{a_1, a_2\}$ и $\vec{b}\{b_1, b_2\}$ называется число, равное произведению длин этих векторов $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ на косинус угла φ между ними. Обозначение: $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$. Если координаты векторов известны, то скалярное произведение находится по формуле $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

1) своё максимальное значение производная по направлению принимает при дифференцировании в направлении градиента. То есть *градиент всегда указывает направление наибольшего возрастания функции в точке*. При этом наименьшее значение у производной достигается в направлении вектора антиградиента $\left(-\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0)\right)$;

2) значение производной в направлении градиента равно модулю градиента $|\operatorname{grad} u(M_0)|$;

3) градиент в точке $M_0(x_0, y_0)$ всегда перпендикулярен (ортогонален) поверхности уровня, проходящей через точку $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

Пример. Найти: 1) градиент функции $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$ в произвольной точке (x, y), а также в точке $(1, 0)$;

2) производную этой функции вдоль единичного вектора, образующего с осью Ox угол $\alpha = 30^\circ$, а с осью Oy – угол $\beta = 60^\circ$.

Решение. 1) Найдём частные производные сначала в произвольной точке (x, y), а затем в точке $(1, 0)$:

$$u'_x = (4x^3 - 8xy^2)\big|_{(1,0)} = 4, \quad u'_y = (4y^3 - 8x^2y)\big|_{(1,0)} = 0.$$

Тогда градиент функции в точке (x, y) есть вектор $\operatorname{grad} u(x, y) = \{4x^3 - 8xy^2, 4y^3 - 8x^2y\}$, причём $\operatorname{grad} u(1, 0) = \{4, 0\}$.

2) Воспользуемся формулой для вычисления производной в заданном направлении:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(1, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(1, 0)\cos\beta = 4 \cdot \cos 30^\circ + 0 \cdot \cos 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

Частные производные высших порядков. Пусть частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ по аргументу x_i функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, определённой в области $\{M\}$, существует в каждой точке этой области. В этом случае частная производная представляет собой функцию переменных $x_1, ..., x_m$, также определённую в области $\{M\}$. Может случиться, что эта функция $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ имеет частную производную по аргументу x_k в некоторой точке M области $\{M\}$. Тогда эту частную производную по переменной x_k называют *второй частной производной*, или *частной производной второго порядка* функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ в точке M (сначала по аргументу x_i, а затем по аргументу x_k) и обозначают одним из следующих символов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \; u''_{x_i x_k}, \; f^{(2)}_{x_i x_k}.$$

При этом если $i \neq k$, то частная производная $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ называется *смешанной частной производной* второго порядка. Аналогично вводится понятие частной производной n-го порядка при любом натуральном $n > 2$.

Например, у функции двух переменных $u = f(x, y)$ существуют две частных производных 1-го порядка $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и четыре производных 2-го порядка $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, две последние из которых являются смешанными частными производными.

Заметим, что в общем случае значение смешанной частной производной зависит от порядка, в котором производилось дифференцирование. Например, не всегда для функции $u = f(x, y)$ выполняется $f''_{xy} = f''_{yx}$. Но если все частные производные второго порядка функции $u = f(x, y)$ непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в этой точке смешанные производные равны: $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$.

Пример. Вычислить частные производные 2-го порядка функции $f(x, y) = x^2 y + 8x^3 - 2y$ в произвольной точке (x, y).

Решение. Имеем: $f'_x = 2xy + 24x^2$, $\quad f'_y = x^2 - 2$, поэтому

$$f''_{xx} = 2y + 48x, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 2x, \quad f''_{yy} = 0.$$

Понятие n-кратной дифференцируемости. Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ называется *n раз дифференцируемой* в точке M_0, если все её частные производные порядка $(n - 1)$ являются дифференцируемыми в этой точке функциями.

Теорема 1 (*достаточное условие n-кратной дифференцируемости*). Для того чтобы функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ была n раз дифференцируема в точке M_0, достаточно, чтобы все её частные производные n-го порядка были непрерывными в точке M_0.

Теорема 2 (*достаточное условие равенства смешанных производных*). Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ n раз дифференцируема в точке M_0. Тогда в этой точке все смешанные частные производные n-го порядка равны.

Дифференциалы высших порядков. Пусть функция m переменных n раз дифференцируема в точке M. Тогда дифференциал n-го порядка вводится по индукции: $d^n f(M) = d(d^{n-1} f(M))$. В случае, когда все переменные $x_1, ..., x_m$ являются независимыми, второй дифференциал может быть вычислен при помощи символической формулы

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot dx_m\right)^2 u.$$

Например, для функции $u = u(x, y)$ двух переменных имеем:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy\right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2,$$

а для функции $u = u(x, y, z)$ трёх переменных получим:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial}{\partial z} \cdot dz\right)^2 u =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz.$$

Пример. Вычислить дифференциал 2-го порядка функции $f(x, y) = x^2y + 8x^3 - 2y$ в произвольной точке (x, y), а также в точке $(1, 0)$.

Решение. Выше мы уже находили все частные производные 2-го порядка этой функции:

$$f''_{xx} = 2y + 48x, \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 2x, \quad f''_{yy} = 0,$$

поэтому

$$d^2f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = (2y + 48x)dx^2 + 4xdxdy.$$

Тогда $d^2f(1, 0) = (2 \cdot 0 + 48 \cdot 1)dx^2 + (4 \cdot 1)dxdy = 48dx^2 + 4dxdy$.

Формула Тейлора для функций m переменных. Рассмотрим для простоты случай функции двух ($m = 2$) переменных $u = f(x, y)$. Пусть функция $u = f(x, y)$ дифференцируема $(n + 1)$ раз в малой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Тогда для любой точки $M(x, y)$ из этой окрестности справедлива формула Тейлора:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x_0, y_0) + ...$$

$$... + \frac{1}{n!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0) + o(\rho^n),$$

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ – расстояние между точками M и M_0, а $o(\rho^n)$ называется остаточным членом в форме Пеа́но. Здесь символическая запись $\frac{1}{n!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)$ (так же как в выражениях для дифференциалов высших порядков) означает, что сначала вы раскрываете скобки, подобно тому как это делается при возведении в n-ю степень, и уже затем приписываете справа от образовавшихся символов ∂^n выражение $f(x_0,y_0)$, после чего образуемые выражения приобретают смысл соответствующих частных производных.

Аналогично записывается формула Тейлора для любого конечного числа переменных.

Пример. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(5,2)$ до членов 3-го порядка включительно функцию

$$f(x,y) = \cos(x+y).$$

Решение. Имеем: $f(5,2) = \cos 7$. Найдём частные производные 1-го,2-го,3-го порядков:

$$f'_x = f'_y = -\sin(x+y)|_{\substack{x=5\\y=2}} = -\sin 7,$$

$$f''_{x^2} = f''_{y^2} = f''_{xy} = -\cos(x+y)\Big|_{\substack{x=5\\y=2}} = -\cos 7,$$

$$f'''_{x^3} = f'''_{x^2y} = f'''_{xy^2} = f'''_{y^3} = \sin(x+y)\Big|_{\substack{x=5\\y=2}} = \sin 7.$$

Тогда по формуле Тейлора в окрестности точки $A(5,2)$ получим:

$$f(x,y) = f(A) + \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k!}\left((x-5)\frac{\partial}{\partial x} + (y-2)\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \cdot f(A) =$$

$$= f(A) + \frac{1}{1!}(f'_x(A)(x-5) + f'_y(A)(y-2)) +$$

$$+\frac{1}{2!}(f''_{x^2}(A)(x-5)^2 + 2f''_{xy}(A)(x-5)(y-2) + f''_{y^2}(A)(y-2)^2) +$$

$$+\frac{1}{3!}(f'''_{x^3}(A)(x-5)^3 + 3f'''_{x^2y}(A)(x-5)^2(y-2) + 3f'''_{xy^2}(A)(x-5)(y-2)^2 + f'''_{y^3}(A)(y-2)^3) + o(\rho^3) =$$

$$= \cos 7 - \sin 7((x-5) + (y-2)) - \frac{1}{2!}\cos 7((x-5)^2 + 2(x-5)(y-2) +$$

$$+(y-2)^2) + \frac{1}{3!}\sin 7((x-5)^3 + 3(x-5)^2(y-2) + 3(x-5)(y-2)^2 + (y-2)^3) + o(\rho^3),$$

где $\rho = \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2}$.

5.2.4 Локальный (безусловный) экстремум функции нескольких переменных

Понятие локального экстремума. Будем говорить, что функция m переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ *локальный максимум* (соответственно, *локальный минимум*), если найдётся окрестность этой точки такая, что для любой точки M из указанной окрестности верно неравенство: $f(M) \leq f(M_0)$ (соответственно, $f(M) \geq f(M_0)$). Если последние неравенства строгие (для всех M из окрестности, отличных от M_0), то получим определения точки *строгого локального максимума* (соответственно, *строгого локального минимума*).

Будем говорить, что функция m переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ *локальный экстремум*, если она имеет в этой точке либо локальный минимум, либо локальный максимум. *Локальным экстремумом* называется значение функции в точке локального экстремума.

Теорема 1 (*необходимое условие локального экстремума, или многомерный аналог теоремы Ферма́*). Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ имеет в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ локальный экстремум. Тогда если в этой точке существуют конечные частные производные первого порядка по всем переменным, то все эти частные производные равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} f'_{x_1}(M_0) = 0, \\ f'_{x_2}(M_0) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_{x_m}(M_0) = 0. \end{cases}$$

Следствие. Если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ дифференцируема в точке $M_0(x_1^0, ..., x_m^0)$ и имеет в этой точке локальный экстремум, то её первый дифференциал в этой точке равен нулю:

$$du(M_0) = f'_{x_1}(M_0)dx_1 + ... + f'_{x_m}(M_0)dx_m = 0.$$

Подчеркнём, что обращение в нуль в точке M_0 всех частных производных первого порядка является *только необходимым* и не является достаточным условием локального экстремума дифференцируемой в этой точке M_0 функции. Например, функция $u = xy$ дифференцируема в точке $(0, 0)$, имеет в этой точке равные нулю частные производные первого порядка $f'_x = y$, $f'_y = x$, но не имеет в точке $(0, 0)$ никакого локального экстремума, так как эта функция равна нулю в самой точке $(0,0)$, а в сколь угодно малой окрестности этой точки принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Точки M_0, в которых все частные производные одновременно обращаются в нуль, называются *стационарными точками* (точками возможного экстремума).

Для того чтобы убедиться, что в данной стационарной точке действительно имеется локальный экстремум, следует проверить выполнение *достаточных условий* локального экстремума. В этих достаточных условиях основную роль будет играть знак второго дифференциала в точке возможного экстремума.

Теорема 2 (*достаточные условия локального экстремума*). Пусть M_0 – стационарная точка функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$, дифференцируемой в окрестности точки M_0 и дважды дифференцируемой в самой точке M_0. Тогда:

1) если $d^2f(M_0) > 0$ (при одновременно не обращающихся в нуль дифференциалах dx_i, $i = \overline{1,m}$), то в точке M_0 функция имеет локальный минимум;

2) если $d^2f(M_0) < 0$ (при условии $\sum\limits_{i=1}^{m} |dx_i| \neq 0$), то в точке M_0 функция имеет локальный максимум;

3) если $d^2f(M_0)$ не сохраняет постоянного знака (является знакопеременным), то локального экстремума в точке M_0 нет.

Пример 1. Исследовать на локальные экстремумы функцию $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$.

Решение. Найдём точки возможного экстремума:

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0, \\ 2(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Найдём в единственной найденной стационарной точке знак второго дифференциала:

$$d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2 = 2dx^2 + 2\cdot 0dxdy + 2dy^2 \quad \Rightarrow$$

$$d^2f(0,1) = 2dx^2 + 2dy^2 > 0 \quad \text{при } dx^2 + dy^2 \neq 0.$$

Следовательно, в точке $(0,1)$ функция имеет локальный минимум, равный $f(0,1) = 0$.

Пример 2. Исследовать на локальные экстремумы функцию $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$.

Решение. Запишем необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0, \\ -2(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

Проверим достаточные условия экстремума. Для этого определим в найденной стационарной точке $(0,1)$ знак второго дифференциала:

$$d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2 = 2dx^2 - 2dy^2.$$

Итак, $d^2f(0,1) = 2dx^2 - 2dy^2$. Заметим, что если взять $dx \neq 0$, $dy = 0$, то получим $d^2f(0,1) > 0$, а если выбрать $dx = 0$, $dy \neq 0$, то получим $d^2f(0,1) < 0$. То есть второй дифференциал не сохраняет определённого знака, а это доказывает, что в единственной стационарной точке $(0,1)$ экстремума нет.

5.3 Дифференциальные уравнения

«Есть три способа отвечать на вопросы:
сказать необходимое, отвечать с приветливостью
и наговорить лишнего».
Плутарх (ок. 46 – ок. 127) – древнегреческий философ,
биограф, моралист.

В математике дифференциальные уравнения занимают особое место. Это связано с тем, что очень многие законы развития природы и человеческого общества описываются дифференциальными уравнениями.

Понятие дифференциального уравнения. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, которое помимо независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_m$ и искомой функции от них $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ содержит ещё производные искомой функции (или её дифференциалы). Решить дифференциальное уравнение значит найти эту функцию. Основная задача теории дифференциальных уравнений – нахождение и изучение функций, являющихся решениями таких уравнений.

По классификации, если функция, относительно которой составлено и решается дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной, то такое уравнение называется *обыкновенный дифференциальным уравнением* (ОДУ). Если же искомая функция зависит от нескольких независимых переменных и, соответственно, дифференциальное уравнение содержит частные производные по этим переменным, то это уравнение называется *дифференциальным уравнением в частных производных*.

Теория дифференциальных уравнений в частных производных более сложная и рассматривается в более полных или специальных курсах математики. Мы в данной лекции рассмотрим только некоторые из важнейших элементов теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обыкновенное дифференциальное уравнение может быть записано в общем виде как

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Наивысший порядок n производных, входящих в ОДУ, называется *порядком* этого дифференциального уравнения.

Например,

$$y + 3y' = 2, \quad xy^2 + (y')^{20} = 1 \ - \ \text{уравнения 1-го порядка,}$$

$$y''' - 2y + 7 = 0, \quad xy^2 + (y''')^4 = 1 \ - \ \text{уравнения 3-го порядка,}$$

$$y^{(100)} + xy^{(50)} = 3x, \quad y^2 - 4(y^{(100)})^3 = 1 \ - \ \text{уравнения 100-го порядка и т.д.}$$

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если оно линейно (первого порядка) относительно функции и её производных, т.е. имеет вид

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y + f(x) = 0,$$

причём при $f(x) \equiv 0$ уравнение называется *однородным* линейным уравнением порядка n, а при $f(x) \neq 0$ – *неоднородным* линейным уравнением порядка n.

Всякая n раз дифференцируемая функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, обращает его в верное тождество, называется *решением* дифференциального уравнения, а график любого решения называется *интегральной кривой*.

Задачу нахождения всех решений данного дифференциального уравнения принято называть *интегрированием* этого уравнения.

5.3.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Мы рассмотрим на лекции в качестве примера дифференциальных уравнений лишь простейший тип уравнений – обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка. *Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка* относительно функции $y = y(x)$ называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, y' – её производная.

Уравнения 1-го порядка, разрешённые относительно производной. Если уравнение (1) можно разрешить относительно производной y', то оно принимает вид

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

и называется *уравнением 1-го порядка, разрешённым относительно производной.* Функцию $f(x, y)$ в правой части уравнения (2) будем считать непрерывной функцией двух переменных, определённой в некоторой области G плоскости Oxy.

Заметим, что уравнение (2) можно записать в виде $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, или в виде $f(x, y)dx - dy = 0$, являющемся частным случаем более общего уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{3}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – известные функции. Уравнение в симметричной форме (3) удобно тем, что переменные x и y в нём равноправны, т.е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой.

Рассмотрим *геометрический смысл* уравнения (2). Предположим, некоторая функция $y = y(x)$ является решением этого уравнения. Тогда в системе координат Oxy касательная к интегральной кривой $y = y(x)$ в каждой лежащей на этой кривой точке $M(x, y)$ имеет угловой коэффициент, равный $f(x, y)$. Таким образом, нахождение всех решений $y = y(x)$ этого уравнения геометрически приводит к следующей задаче: при условии, что в каждой точке $M(x, y)$ некоторой области G плоскости Oxy с помощью функции $f(x, y)$ задано определённое направление, найти все кривые, которые в каждой своей точке $M(x, y)$ имеют направление, совпадающее с заранее заданным в этой точке направлением.

Приведём примеры обыкновенных дифференциальных уравнений вида (2) и (3):

$$y' = xe^y, \quad y' = \frac{y \ln x}{x}, \quad xdx + ydy = 0.$$

Решением дифференциального уравнения 1-го порядка является функция $y = y(x)$, определённая на некотором конечном или бесконечном интервале (a, b), которая при подстановке в уравнение обращает его в верное тождество.

Например, функция $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, является решением уравнения $3y - xy' = 0$, так как при подстановке в уравнение обращает его в верное тождество.

Задача Коши. Пусть помимо уравнения $y' = f(x, y)$ дано дополнительное условие в виде $y(x_0) = y_0$, задающее значение функции $y = y(x)$ в точке $x = x_0$. Это условие часто называют *начальным условием*, а задачу об отыскании решения дифференциального уравнения

$y' = f(x, y)$ принято называть *задачей Коши.* Это одна из важнейших задач в теории дифференциальных уравнений.

Ответ на вопрос о том, при каких условиях уравнение (2) имеет решение, даёт теорема Коши, которая называется теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (2) и является основной в теории дифференциальных уравнений.

Теорема (Коши). *Если функция $f(x, y)$ и её частная производная $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой области G плоскости Oxy, то какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0) области G, в некоторой окрестности этой точки существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию*

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

Геометрически теорема утверждает, что через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) области G проходит единственная интегральная кривая. Решить задачу Коши – значит из множества интегральных кривых, выделить ту, которая проходит через заданную точку (x_0, y_0) плоскости Oxy.

Точки плоскости, через которые либо проходит более одной интегральной кривой, либо не проходит ни одной интегральной кривой, называются *особыми точками* данного уравнения.

Понятия общего и частного решений. Функция $y = \varphi(x, C)$ называется *общим решением* дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, если, во-первых, при любом (допустимом) C функция $y = \varphi(x, C)$ удовлетворяет этому уравнению и, во-вторых, для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдётся такое значение C_0, что $\varphi(x_0, C_0) = y_0$, т.е. решение удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Всякое решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, которое получается из общего его решения при задании конкретного значения постоянной C_0, называется *частным решением* этого дифференциального уравнения.

Например, решениями ОДУ $y' = y$ является совокупность функций вида $y = Ce^x$, где $C \in \mathbb{R}$. Здесь $y = Ce^x$ – общее решение, $y = e^x$ – частное решение.

Геометрически общее решение $y = y(x, C)$ представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости Oxy, зависящее от одной произвольной константы C, а частное решение $y = y(x, C_0)$ – одну интегральную кривую этого семейства, проходящую через заданную точку (x_0, y_0).

Пример. Решить дифференциальное уравнение 1-го порядка $y' + y^2 = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = -y^2$, или $-\frac{dy}{y^2} = dx$. Возьмём неопределённый интеграл от обеих частей этого равенства:

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} = x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x+C},$$

где C – произвольная постоянная.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

называется совокупность функций вида $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$ с независимыми друг от друга постоянными $C_1, ..., C_n$, которые при подстановке в уравнение обращают его в верное равенство. *Частные решения* могут быть получены из общего подстановкой конкретных значений констант $C_1, ..., C_n$. В частности, для нахождения этих констант могут быть использованы начальные условия в виде $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Пример 1. Проверить, удовлетворяет ли дифференциальное уравнение $y' = 3x^2$ условиям теоремы Коши. Если да, то решить его.

Решение. Данное уравнение является уравнением 1-го порядка. Оно удовлетворяет всем условиям теоремы Коши, так как функции $f(x, y) = 3x^2$ и $f'_y(x, y) = 0$ определены и непрерывны на всей плоскости Oxy. Найдём общее решение данного уравнения. Перепишем уравнение в виде $dy = 3x^2dx$ и проинтегрируем: $\int dy = \int 3x^2dx$, откуда получаем $y = x^3 + C$, где C – произвольная константа. Геометрически это общее решение представляет собой семейство кубических парабол. При различных значениях постоянной C получаем различные решения данного уравнения. Например, если $C = 0$, то $y = x^3$, если $C = -1$, то $y = x^3 - 1$ и т.д.

Пример 2. Решить задачу Коши: $y' = 3x^2$, где $y(1) = 0$.

Решение. Для решения задачи Коши, т.е. отыскания частного решения уравнения, удовлетворяющего начальному условию $y(1) = 0$, подставим значения $x = 1$, $y = 0$ в общее решение $y = x^3 + C$. Получим $0 = 1^3 + C$, откуда находим $C = -1$. Таким образом, нашли частное решение $y = x^3 - 1$ (из семейства кубических парабол мы выбрали одну, проходящую через точку $(0, 1)$).

Сразу же отметим, что не существует общих методов интегрирования произвольного дифференциального уравнения 1-го порядка. Обычно в курсе дифференциальных уравнений рассматривают важнейшие частные виды дифференциальных уравнений 1-го порядка, интегрирование которых может быть сведено к вычислению неопределённых интегралов. Такие дифференциальные уравнения называют *интегрируемыми в квадратурах.*

Уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Дифференциальным уравнением 1-го порядка *с разделяющимися переменными* называют уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y), \quad \text{или} \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx,$$

с непрерывными функциями $f_1(y)$ и $f_2(x)$ $(f_2(y) \neq 0)$. Для решения этого уравнения его следует проинтегрировать:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx.$$

Полученное в результате интегрирования уравнение $\Phi(x, y) = 0$, зависящее от одной произвольной константы, неявным образом определяет общее решение уравнения. Можно сказать, что $\Phi(x, y) = 0$ является решением уравнения *в неявном виде*. Иногда это уравнение удаётся разрешить относительно переменной y.

Если требуется решить задачу Коши в виде: «Среди всех решений уравнения $\dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ найти удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$», то при интегрировании нужно вначале найти общее решение, а затем подставить в него начальное условие и, таким образом, найти C. Иначе, можно сразу взять определённый интеграл

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f_2(y)} = \int_{x_0}^{x} f_1(x)dx.$$

Пример 1. Решить линейное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $xdx + ydy = 0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $ydy = -xdx$ и возьмём неопределённый интеграл от обеих частей этого равенства:

$$\int ydy = -\int xdx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = C^2.$$

Мы видим, что интегральные кривые данного уравнения представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в точке начала координат и радиусом C.

Пример 2. Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx} = xy^2 + 2xy$ с начальным условием $y(0) = 1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = xy(y+2)$.

1) Пусть $y(y+2) \not\equiv 0$, тогда

$$\frac{dy}{y(y+2)} = xdx.$$

Возьмём неопределённый интеграл:

$$\int \frac{dy}{y(y+2)} = \int xdx \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\int \frac{(y+2)-y}{y(y+2)}dy = \int xdx \;\Leftrightarrow\; \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right)dy = \int 2xdx$$

$$\ln|y| - \ln|y+2| = x^2 + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x^2 + C_1 \; (C_1 \in \mathbb{R}).$$

Далее удобно представить произвольную константу C_1 в виде $\ln C$ $(C > 0)$:

$$\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x^2 + \ln C \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{y+2}\right| - \ln C = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{C(y+2)}\right| = x^2.$$

Потенцируя[1] по основанию e, получим

$$\left|\frac{y}{y+2}\right| = Ce^{x^2} \; (C > 0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{y+2} = Ce^{x^2} \; (C \in \mathbb{R}),$$

откуда находим общее решение

$$y = \frac{2Ce^{x^2}}{1 - Ce^{x^2}}.$$

Учтём начальное условие: $1 = \dfrac{2C}{1-C}$, откуда $C = \dfrac{1}{3}$. Подставляя в общее решение, получаем окончательно $y = \dfrac{2e^{x^2}}{3 - e^{x^2}}$.

2) Проверкой убеждаемся, что функции $y \equiv 0$ и $y \equiv -2$ также являются решениями данного ОДУ (не получаемыми из общего решения), однако они не удовлетворяют начальному условию.

Замечание. Такой же ответ получается при решении задачи другим способом: вычислением определённого интеграла

$$\int_1^y \frac{dy}{y(y+2)} = \int_0^x xdx. \qquad \text{Ответ: } y = \frac{2e^{x^2}}{3 - e^{x^2}}.$$

5.3.2 Обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка

Если общее решение уравнений 1-го порядка зависит от одной произвольной константы, то общее решение уравнений 2-го порядка уже зависит от двух произвольных констант $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

[1]Пропотенцировать равенство $A = B$ по основанию e означает перейти к эквивалентному равенству $e^A = e^B$.

Геометрически решения дифференциального уравнения 2-го порядка представляют собой пучок интегральных кривых, проходящих через каждую точку (x_0, y_0) плоскости Oxy. Поэтому чтобы выделить из множества всех интегральных кривых одну определённую интегральную кривую $y = y(x)$, недостаточно задать точку (x_0, y_0), через которую должна проходить эта интегральная кривая. Следует задать ещё и направление, которое должна иметь эта интегральная кривая в точке (x_0, y_0), т.е. задать ещё и тангенс угла, образованного касательной к это кривой в точке (x_0, y_0) с положительным направлением оси Ox. Таким образом, для выделения *единственного решения* дифференциального уравнения 2-го порядка следует добавить к этому уравнению *два начальных условия* $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$, в которых y_0 и y'_0 – заданные числа, называемые *начальными значениями*.

ОДУ 2-го порядка, допускающие понижение порядка. Рассмотрим класс ОДУ 2-го порядка, которые заменой переменной могут быть сведены к уравнению 1-го порядка. Так, понижение порядка допускают уравнения вида

$$y'' = f(x, y').$$

Полагая $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx}$, получим дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

с искомой функцией $p = p(x)$.

Пример. Найти общий интеграл уравнения $y'' = \dfrac{y'}{x}$.

Решение. Полагая $y' = p$, $y'' = \dfrac{dp}{dx}$, получим уравнение

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln|p| = \ln|x| + \ln C_1$$

$$\ln|p| = \ln(C_1|x|) \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = C_1 x \quad (C_1 \in \mathbb{R}).$$

Заменим $p(x)$ на $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 x \quad \Leftrightarrow \quad dy = C_1 x dx \quad \Leftrightarrow \quad \int dy = C_1 \int x dx \quad \Leftrightarrow \quad y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Это и есть искомый общий интеграл, описывающий все решения данного дифференциального уравнения.

Если дана функция (семейство функций), то как построить дифференциальное уравнение, которому она (оно) удовлетворяет? Чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые данного семейства $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$, следует продифференцировать это равенство n раз, считая, что y – функция независимой переменной x, а затем из полученных равенств и самого уравнения $y = \varphi(x, C_1, ..., C_n)$ исключить $C_1, ..., C_n$.

Пример. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Решение. Дважды дифференцируя заданную функцию, находим, что

$$y' = (C_1 + C_2 x)'e^x + (C_1 + C_2 x)(e^x)' = C_2 e^x + y \quad \Rightarrow \quad y'' = C_2 e^x + y'.$$

Из равенства $y' = C_2 e^x + y$ получаем, что $C_2 e^x = y' - y$. Подставим в равенство $y'' = C_2 e^x + y'$, исключив тем самым выражение $C_2 e^x$:

$$y'' = (y' - y) + y' \quad \Leftrightarrow \quad y'' - 2y' + y = 0.$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение 2-го порядка.

Мы рассмотрели лишь самые базовые понятия из курса дифференциальных уравнений[1]. Не будем сейчас останавливаться на других видах дифференциальных уравнений, решаемых в стандартном курсе дифференциальных уравнений, и методах их решения, поскольку перед нами стоят другие задачи и не это является непосредственной целью нашего ознакомительного курса лекций.

[1] Школа Опойцева (диф. уравнения): https://oschool.ru/lectures/h-mats/VJATTVY6

6 ЛЕКЦИЯ: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия

«Если что и даёт ясное представление о высшей математике, так это линейная алгебра».

Босс В.И. (род. 1944) – псевдоним проф. В.И. Опойцева, сотрудника ИПУ РАН и преподавателя кафедры проблем управления МФТИ.

Краткое содержание.

Раздел: Линейная алгебра.

I. Понятие матрицы. Равные матрицы, квадратная, диагональная, нулевая, единичная матрица. Основные операции над матрицами (умножение на число, сложение, умножение на матрицу, возведение в степень, транспонирование) и их свойства.

Определитель квадратной матрицы 1-3 порядков и его основные свойства. Приложения определителя: площадь треугольника с вершинами в трёх точках (на плоскости). Обратная матрица. Невырожденная матрица. Необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы. Свойства обратной матрицы.

II. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными и их решение (метод определителей и формулы Крамера, метод обратной матрицы, метод подстановки, метод последовательного исключения неизвестных (Гаусса), графический подход). Системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными (метод определителей).

Раздел: Аналитическая геометрия.

III. Понятие алгебраической линии на плоскости. Линии 1-го и 2-го порядков.

Прямая линия на плоскости: общее уравнение прямой, уравнение прямой в отрезках, уравнение прямой, проходящей через 2 данные точки, уравнение прямой с угловым коэффициентом. Параметрические уравнения прямой. Условия пересечения, параллельности, совпадения, перпендикулярности прямых. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Прямая линия в пространстве: канонические и параметрические уравнения прямой. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Плоскость и прямая в пространстве: общее уравнение плоскости, уравнение плоскости в отрезках, взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Уравнение плоскости, проходящей через 3 различные точки, не лежащие на одной прямой. Расстояние от точки до плоскости.

Линии второго порядка на плоскости: эллипс, парабола, гипербола. Простейшие поверхности 2-го порядка в пространстве: сфера, эллипсоид, конус, цилиндр.

Литература:

[1]. Раздел 1 (Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии). Гл. 1 (Матрицы и определители). Гл. 2 (Системы линейных уравнений)

[2]. Часть 2 (Математический анализ функций нескольких переменных). Гл. 10 (Элементы высшей алгебры)

[3]. Гл. 2 (Системы координат и их простейшие применения). Гл. 3 (Определители и системы линейных уравнений). Гл. 6 (Основы аналитической геометрии).

6.1 Матрицы, определители и их свойства

«Философы веками спорили – возможно ли невербальное мышление. Брауэр[1] показал, что математика – полностью автономный, находящий основание в себе самом вид деятельности, не зависящий от языка. Идеи математики уходят в разум куда глубже, чем язык. Они не зависят от словесного восприятия и куда богаче его. Естественный язык способен, по Брауэру, создать лишь копию идей, соотносимую с ней самой, как фотография с пейзажем».

Ваннах Михаил Александрович (1908–1997), живописец, член Союза художников СССР.

Понятие матрицы. Виды матриц. Важнейшим понятием линейной алгебры является матрица.[2] *Матрицей* размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами* матрицы. Матрицы обычно обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, $A, B, C, ...$, а для обозначения элементов мат-

[1] *Лёйтзен Эгберт Ян Брауэр* (нидерл. Luitzen Egbertus Jan Brouwer; 1881–1966) – голландский философ и математик, работавший в таких областях математики как топология, теория множеств, математическая логика, теория меры и комплексный анализ.

[2] *Линейная алгебра* – математическая дисциплина, раздел алгебры, содержащий, в частности, теорию линейных уравнений, матриц и определителей, а также теорию векторных (линейных) пространств.

рицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i – номер строки, j – номер столбца.

Обозначение матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или в кратком виде: $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Если хотят подчеркнуть, что матрица имеет размерность m на n, то пишут $A_{m\times n}$.

Например,

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 75 & 4 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы A и B одного размера называются *равными*, если они совпадают поэлементно: $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Если матрица состоит из одной строки, то её называют *вектором-строкой*, а если из одного столбца – то *вектором-столбцом*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \text{ – вектор-строка,}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \text{ – вектор-столбец.}$$

Матрица называется *квадратной n-го порядка*, если число её строк равно числу её столбцов и равно n. Элементы матрицы a_{ii}, у которых номер столбца равен номеру строки $(i = j)$, называются *диагональными* и образуют *главную диагональ* матрицы.

Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица называется *диагональной*.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – диагональная матрица 3-го порядка.}$$

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется *единичной матрицей* n-го порядка и обычно обозначается буквой E.

Например,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичная матрица 3-го порядка.}$$

Матрица любого размера называется *нулевой*, или *нуль-матрицей*, если все её элементы равны нулю.

Например,

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ – нулевая матрица размера } 3 \times 4.$$

6.1.1 Операции над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причём некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые – специфические.

1. *Умножение матрицы на число.* Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda A$ с элементами $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 2A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например,

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т.е. $0 \cdot A = \mathbf{0}$.

2. *Сложение матриц.* Суммой двух матриц A и B одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица $C = A + B$ с элементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

В частности, $A + \mathbf{0} = A$.

3. *Вычитание матриц.* Разность двух матриц A и B одинаковой размерности $m \times n$ определяется как матрица $C = A - B$ с элементами $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, где $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

4. *Умножение матриц.* Операция умножения матрицы A на матрицу B определена, только когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Произведением матриц $A_{m\times k} \cdot B_{k\times n}$ называется такая матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj},\ i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Пример. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Убедимся в том, что размерности матриц согласованы и матрицы можно перемножить: $A_{2\times3}$, $B_{3\times3}$. В результате будет получена матрица C размера 2×3. Чтобы найти элемент c_{11}, надо перемножить первую строку матрицы A с первым столбцом матрицы B. Чтобы найти элемент c_{ij}, надо перемножить i-ю строку матрицы A с j-м столбцом матрицы B. Получим:

$$C = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot5+2\cdot(-2) & 1\cdot0+0\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot4+2\cdot1 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot5+0\cdot(-2) & 3\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 3\cdot1+1\cdot4+0\cdot1 \end{pmatrix},$$

$$\text{т.е. } C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами. Пусть A, B, C – матрицы одной размерности, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда имеем следующие *свойства операций сложения матриц и умножения матрицы на число*:

1) $A + B = B + A$ (свойство коммутативности, или перестановочное свойство операции сложения);

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (свойство ассоциативности, или сочетательное свойство операции сложения);

3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (свойства дистрибутивности, или распределительные свойства умножения матрицы на число);

4) $A + \mathbf{0} = A$, $A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0}$ (свойства нулевой матрицы);

5) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ (свойство ассоциативности, или сочетательное свойство умножения матрицы на числа).

Свойства операции умножения матриц (размерности матриц считаются согласованными):

1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (ассоциативность);

2) $(\mu \cdot A) \cdot B = \mu \cdot (A \cdot B)$ (ассоциативность);

3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);

4) $E_{mm} \cdot A_{mn} = A_{mn} \cdot E_{nn} = A_{mn}$ (свойство единичной матрицы). Единичная матрица играет при умножении матриц ту же роль, что и число 1 при умножении чисел.

5) В общем случае умножение матриц не коммутативно: $A \cdot B \neq B \cdot A$ (даже если оба этих произведения существуют и их размерности совпадают).

Пример. Показать, что $A \cdot B \neq B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A_{2\times 3} \cdot B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}, \quad \text{но} \;\; B_{3\times 2} \cdot A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Произведение двух ненулевых матриц может равняться нулевой матрице, т.е. из того, что $A \cdot B = \mathbf{0}$, не следует, что $A = \mathbf{0}$ или $B = \mathbf{0}$.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \quad \text{но} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. *Возведение в степень.* Пусть $n \in \mathbb{N}$, A – квадратная матрица. Натуральной степенью n матрицы A называется матрица A^n той же размерности, определяемая как произведение n одинаковых матриц, равных A, т.е.

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{n \text{ раз}}.$$

По определению полагают $A^0 = E$. Нетрудно показать, что

$$A^n \cdot A^k = A^{n+k}, \quad (A^n)^k = A^{nk}.$$

Пример. Найти A^2, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

Обратим внимание, что из равенства $A^n = \mathbf{0}$ еще не следует, что матрица $A = \mathbf{0}$.

6. *Транспонирование матрицы* – это переход от матрицы $A_{m\times n}$ к матрице $A'_{n\times m}$, в которой строки и столбцы поменялись местами[1]. Иначе: транспонированием называется операция (над матрицей), при которой элемент a_{ij} помещается на место a_{ji}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для квадратных матриц элементы, стоящие на главной диагонали, при транспонировании остаются на своих местах.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования:

1) $(A')' = A$; 3) $(A+B)' = A' + B'$;

2) $(\lambda A)' = \lambda A'$; 4) $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$.

6.1.2 Определители квадратных матриц и их свойства

Необходимость введения определителя – одной из важнейших числовых характеристик квадратной матрицы – тесно связана с решением систем линейных уравнений. Определитель матрицы A будем обозначать $|A|$, $\det A$ или $\triangle$.[2]

Пусть $A = (a_{11})$ – матрица первого порядка, состоящая из одного элемента. Тогда *определителем* этой матрицы назовём число a_{11}. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – матрица второго порядка. *Определителем* этой мат-

[1] Для транспонированной матрицы также можно встретить обозначение A^{T}.

[2] *Determinant* (англ.)

рицы называется число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Определитель единичной матрицы любого порядка равен 1: $\det E = 1$.

Пример. Найти определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$.

Пусть теперь дана квадратная матрица третьего порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем третьего порядка матрицы A называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Существуют другие способы вычисления определителей, причём для матриц произвольного порядка n. Например, определитель 3-го порядка можно вычислять так:

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(это называется *раскрыть определитель по первой строке*), или так

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

(это называется *раскрыть определитель по первому столбцу*).

Свойства определителей. Существенно упростить вычисление определителей (особенно высокого порядка) позволяют следующие свойства.

1) Если какая-либо строка (или столбец) матрицы состоит из одних нулей, то её определитель равен нулю.

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

2) Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то её определитель умножится на это число λ. За знак определителя можно выносить общий множитель элементов любой строки или столбца, в отличие от матрицы, за знак которой можно выносить общий множитель лишь всех её элементов.

Например, $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 16 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 16(1 \cdot 0 - 1 \cdot 2) = -32.$

3) При транспонировании матрицы её определитель не изменяется:

$$\det A = \det A'.$$

4) При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак на противоположный.

5) Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то её определитель равен нулю.

6) Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны (одна строка превращается в другую после умножения её на ненулевое число), то её определитель равен нулю.

7) Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-нибудь строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

8) Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

В частности, даже если $A \cdot B \neq B \cdot A$, то $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$. Заметим, что $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

Задачи, в которых используется понятие определителя.

1. Площадь треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ находится по формулам:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

(знак выбирается так, чтобы в итоге площадь оказалась положительной).

2. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Условие того, что три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ лежат на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

6.1.3 Обратная матрица и её свойства

Для каждого действительного числа $a \neq 0$, как известно, существует понятие обратного к нему числа $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ такого, что произведение $a \cdot a^{-1} = 1$. Для квадратных матриц также существует аналогичное понятие.

Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице A, если при умножении этой матрицы на A как слева, так и справа получается единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = E \quad (\text{и} \;\; A \cdot A^{-1} = E).$$

Обратная матрица имеет тот же порядок, что и исходная.

Однако не каждая матрица имеет обратную. Если условие $a \neq 0$ является необходимым и достаточным условием существования числа a^{-1}, то для существования матрицы A^{-1} таким условием является требование $\det A \neq 0$. Если определитель матрицы отличен от нуля, то такая квадратная матрица называется *невырожденной*, в противном случае – *вырожденной*.

Теорема (*необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы*). Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Для невырожденных матриц справедливы следующие **свойства**:

1) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$; 3) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$; 5) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

2) $(A^{-1})^{-1} = A$; 4) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

6.2 Системы линейных уравнений

«Мы с наслаждением познаём математику... Она восхищает нас, как цветок лотоса».

Аристотель (384 до н. э.–322 до н. э.) — древнегреческий философ. Ученик Платона. С 343 до н. э. – воспитатель Александра Македонского.

Среди систем алгебраических уравнений важную роль играют линейные системы. К системам линейных уравнений приводит множество прикладных задач.

Основные понятия и определения. Системой m линейных уравнений с n переменными $x_1, x_2, ..., x_n$ называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где действительные числа a_{ij} называются *коэффициентами*, b_i – *свободными* (от переменных) *членами* уравнений, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. *Решением* системы (1) называется такой набор чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, при подстановке которых в систему все уравнения обращаются в верные равенства.

Систему уравнений принято называть *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* в противном случае. Совместная система уравнений называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет более одного решения. Две системы уравнений называются *равносильными*, или *эквивалентными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Замечание. Систему (1) кратко можно записать в *матричном виде*. Для этого обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Здесь A – *матрица коэффициентов* при переменных, или *матрица системы*; X – столбец переменных, B – столбец свободных членов.

Тогда система (1) примет вид

$$AX = B.$$

Рассмотрим, далее, системы n линейных уравнений с n переменными (число уравнений в системе (1) равно числу неизвестных: $m = n$). Тогда матрица системы является квадратной и её определитель $\det A$ называется *определителем системы.*

6.2.1 Системы двух уравнений с двумя переменными

Рассмотрим простейший случай линейных систем – *системы двух уравнений с двумя переменными.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{2}$$

где $a_{11}^2 + a_{12}^2 \neq 0$, $a_{21}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ (коэффициенты a_{11}, a_{12}, а также a_{21}, a_{22} одновременно не обращаются в нуль).

1-й способ решения – **метод определителей** (по формулам Кра́мера).

Случай 1. Пусть определитель системы $\det A = \triangle$ не равен нулю.

Для решения системы (2) исключим переменную x_2, умножив первое уравнение на a_{22}, второе на $(-a_{12})$ и сложив их. В результате получим систему

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases} \tag{3}$$

Заметим, что выражение в скобках есть (главный) определитель системы

$$\triangle = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Введём два вспомогательных определителя

$$\triangle_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \triangle_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Первый из них $\triangle_1$ получен из главного определителя системы заменой его первого столбца на столбец правых частей системы (свободных членов), второй вспомогательный определитель $\triangle_2$ получен из главного определителя заменой его второго столбца на столбец свободных членов. Тогда систему (3) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \triangle \cdot x_1 = \triangle_1, \\ \triangle \cdot x_2 = \triangle_2. \end{cases} \tag{4}$$

Из полученной системы следует, что если главный определитель системы $\triangle \neq 0$, то система (2) имеет единственное решение, определяемое по формулам (*формулы Кра́мера*)

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle}, \quad x_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle}.$$

В общем случае справедлива

Теорема Крамера. Пусть $\triangle$ – определитель матрицы $A_{n\times n}$ системы n уравнений с n неизвестными, а $\triangle_j$ – определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\triangle \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое по формулам (*Крамера*)[1]

$$x_j = \frac{\triangle_j}{\triangle}, \; j = \overline{1, n}.$$

Случай 2. Пусть теперь главный определитель $\triangle = 0$.

Возможны две ситуации: а) хотя бы один из вспомогательных определителей $\triangle_1$ или $\triangle_2$ отличен от нуля; б) оба определителя $\triangle_1$ и $\triangle_2$ равны нулю.

В ситуации а), когда $\triangle = 0$, но $\triangle_1 \neq 0$ или $\triangle_2 \neq 0$, хотя бы одно из равенств в системе (4) не будет выполняться, а это значит, что система не имеет решений.

В ситуации б) $\triangle = \triangle_1 = \triangle_2 = 0$ исходная система имеет бесконечно много решений, так как одно из уравнений системы является следствием другого и его можно отбросить. Оставшееся уравнение с двумя неизвестными имеет бесконечно много решений. В этом случае одну переменную задают произвольно, а другая через неё выражается.

Пример 1. При всех значениях параметра a решить систему

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ x + ay = 1. \end{cases}$$

[1] *Крамер Габриэль* (1704–1752) – швейцарский математик.

Решение. Вычислим все три определителя системы:

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1, \quad \triangle_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 1, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2.$$

Тогда, если: 1) $\triangle \neq 0$, т.е. при $a \neq \pm 1$, система имеет единственное решение, которое находим по формулам Крамера:

$$x = \frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{2a-1}{a^2-1}, \quad y = \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{a-2}{a^2-1}.$$

2) $\triangle = 0$ при $a = \pm 1$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

При $a = 1$ имеем $\triangle_1 = 2a - 1 = 1 \neq 0$, т.е. система не имеет решений.

При $a = -1$ имеем $\triangle_1 = 2a - 1 = -3 \neq 0$, т.е. система также не имеет решений.

Ответ: при $a \neq \pm 1$ $(x, y) = \left(\dfrac{1-2a}{1-a^2}, \dfrac{a-2}{a^2-1}\right)$; при $a = \pm 1$ система не имеет решений (несовместна).

2-й способ решения – с помощью **обратной матрицы**[1]. Пусть решается система n линейных уравнений с n неизвестными

$$AX = B,$$

в которой определитель матрицы $A_{n\times n}$ не равен нулю (в этом случае существует обратная матрица A^{-1}). Чтобы решить систему (2), надо вычислить обратную матрицу и затем умножить слева обе части матричного уравнения $AX = B$ на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Поскольку $A^{-1}A = E$ (единичная матрица) и $EX = X$, то получим искомое решение

$$X = A^{-1}B.$$

Пример 2. Пусть известны матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и обратная к ней матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Решить систему $AX = B$, где $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Умножая матричное равенство слева на обратную матрицу, получим

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -9 \\ -1 & 10 & 17 \end{pmatrix}.$$

3-й способ решения – **метод подстановки**. Это самый известный ещё из средней школы способ решения линейных систем алгебраических уравнений. Суть метода проста: из одного уравнения выражается

[1] Для этого необходимо знать специальный метод нахождения обратных матриц через алгебраические дополнения.

одна из переменных и подставляется в другое уравнение. Это уравнение уже зависит от одной переменной и его легко решить. Найдя одну из переменных, затем находят вторую.

Пример 3. При всех значениях параметра a решить систему

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ x + ay = 1. \end{cases}$$

Решение. Выразим, например, x из второго уравнения и подставим в первое уравнение:

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ x = 1 - ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(1 - ay) + y = 2, \\ x = 1 - ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - a^2) = 2 - a, \\ x = 1 - ay. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы. Если $a = \pm 1$, то, как легко убедиться, это уравнение не имеет решений, поскольку его левая часть равна нулю, а правая – нет.

Если же $a \neq \pm 1$, то, поделив на $1 - a^2$, из первого уравнения находим $y = \dfrac{2 - a}{1 - a^2}$. Тогда из второго уравнения находим x:

$$x = 1 - ay = 1 - a \cdot \frac{2 - a}{1 - a^2} = \frac{1 - 2a}{1 - a^2}.$$

Ответ: при $a \neq \pm 1$ $(x, y) \in \left\{ \left(\dfrac{1 - 2a}{1 - a^2}, \dfrac{2 - a}{1 - a^2} \right) \right\}$; при $a = \pm 1$ система не имеет решений.

4-й способ решения – **метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса**. Следует упомянуть ещё один метод решения систем m линейных уравнений с n неизвестными. Он более эффективен на практике по-сравнению с предыдущими методами, особенно в случае систем больших размерностей. Это так называемый *метод последовательного исключения неизвестных* (*метод Гаусса*), который состоит в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные. В общем случае, в силу ограниченности времени, мы не будем подробно останавливаться на этом методе. Однако разберём этот метод для систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Пусть требуется решить систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

Исключим вначале из второго уравнения переменную x_1. Для этого умножим первое уравнение на a_{21}, а второе – на a_{11}, сделав коэффициенты при x_1 одинаковыми:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21}, \\ a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}a_{11}x_2 = b_2a_{11}. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое уравнение и придём к равносильной системе

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21}, \\ (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11}. \end{cases}$$

Решим второе уравнение (теперь в нём только одна неизвестная x_2). Если $a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то его решением будет $x_2 = \dfrac{b_2a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}$. Зная x_2, можно подставить это значение в первое уравнение и найти x_1.

Если же $a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} = 0$, то надо посмотреть на правую часть b_2a_{11} второго уравнения. Если и она равна нулю, то второе уравнение выполняется при всех $x_2 \in \mathbb{R}$. Принимая, например, $x_2 = t$, подставляем это в первое уравнение и, выражая x_1 через t, находим общий вид решений.

Если при $a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} = 0$ правая часть b_2a_{11} не равна нулю, то второе уравнение не имеет решений, а следовательно, и вся система тоже.

Пример 4. При всех значениях параметра a решить систему

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ x + ay = 1. \end{cases}$$

Решение. Чтобы выровнять коэффициенты при x, умножим второе уравнение на a

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ ax + a^2y = a. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ (a^2 - 1)y = a - 2. \end{cases}$$

Решим второе уравнение. Если $a^2 = 1$, т.е. $a = \pm 1$, то легко убедиться, что уравнение не имеет решений. При $a^2 \neq 1$ уравнение имеет единственное решение $y = \dfrac{a-2}{a^2-1}$, подставляя которое в первое уравнение, находим $x = \dfrac{1-2a}{1-a^2}$.

Ответ: при $a \neq \pm 1$ имеем $(x, y) \in \left\{ \left(\frac{1-2a}{1-a^2}, \frac{2-a}{1-a^2} \right) \right\}$; при $a = \pm 1$ решений нет.

5-й способ решения, возможный для систем 2-го порядка, – **графический подход**. Каждое из уравнений системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

задаёт на плоскости Oxy прямую линию. Возможны три случая взаимного расположения двух прямых на плоскости:

1) прямые пересекаются в одной точке (это соответствует случаю единственного решения и означает непропорциональность коэффициентов при x_1 и x_2):

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}};$$

2) прямые совпадают (это соответствует случаю бесконечного множества решений системы и означает пропорциональность всех коэффициентов двух уравнений):

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2};$$

3) прямые не имеют общих точек (параллельны):

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}.$$

Замечание. Во всех пропорциях выше коэффициенты в знаменателях могут быть равны нулю, если при этом в числителе также стоит нуль.

Пример 5. Не решая системы, определить, сколько решений она имеет в зависимости от значений параметра a:

$$\begin{cases} ax + y = 2, \\ x + ay = 1. \end{cases}$$

Решение. 1) Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{a}{1} \neq \frac{1}{a} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \neq 1.$$

2) Система имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{2}{1} \quad \Leftrightarrow \quad a \in \varnothing.$$

3) Система не имеет решений тогда и только тогда, когда

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a} \neq \frac{2}{1} \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 1.$$

6.2.2 Системы трёх уравнений с тремя переменными

При решении методом определителей линейных систем 3-го порядка

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

следует найти главный определитель системы

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и выписать три вспомогательных определителя

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \triangle_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

1) В случае $\triangle \neq 0$ решение определяется по формулам Кра́мера

$$x = \frac{\triangle_1}{\triangle}, \quad y = \frac{\triangle_2}{\triangle}, \quad z = \frac{\triangle_3}{\triangle}.$$

2) Если $\triangle = 0$ и хотя бы один из определителей $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3$ отличен от нуля, то система не имеет решений (несовместна).

3) Если $\triangle = \triangle_1 = \triangle_2 = \triangle_3 = 0$, то система либо совсем не имеет решений, либо (если она имеет хотя бы одно решение), то она имеет бесконечно много решений.

Правило 1. Если какие-либо два уравнения в системе имеют пропорциональные коэффициенты

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

то эти уравнения эквивалентны и одно из них можно отбросить. В системе останется два уравнения. В этом случае система может иметь или не иметь решений.

Правило 2. Если для каких-либо двух уравнений имеет место

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2},$$

то система несовместна.

Геометрическая интерпретация системы трёх линейных уравнений. Каждое из уравнений задаёт в трёхмерном пространстве плоскость.

1) Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда три плоскости пересекаются в одной точке, координаты которой и будут решением.

2) Система не имеет решений тогда и только тогда, когда плоскости параллельны или третья плоскость параллельна прямой, по которой пересекаются первые две плоскости.

3) Система имеет бесконечно много решений, если либо все три плоскости совпадают, либо все три плоскости проходят через одну прямую.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Приведём систему к стандартному виду:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x + 5y - 4z = -5, \\ 4x + y - 3z = -4. \end{cases}$$

Вычислим все определители системы:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -12, \quad \triangle_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -20.$$

Тогда по формулам Крамера получаем

$$x = \frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{-10}{-2} = 5, \quad y = \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad z = \frac{\triangle_3}{\triangle} = \frac{-20}{-2} = 10.$$

Ответ: $(x, y, z) = (5, 6, 10)$.

6.3 Линии и поверхности на плоскости и в пространстве

«Дайте линиям подлинную свободу».
Эмиль Бурдель.

Аналитическая геометрия – раздел математики, изучающий геометрические образы алгебраическими методами. Ещё в XVII веке французским математиком Декартом (1596–1650) был разработан метод координат, являющийся основным инструментом аналитической геометрии.

6.3.1 Аналитическая геометрия на плоскости

«Врата и ключ этих наук – математика, которую... открыли безупречные мужи от начала мира и которую предпочитали прочим наукам все безупречные и мудрые. А пренебрежение ею уже на протяжении 300 или 400 лет разрушило всякое знание у латинян. Ибо, не зная её, нельзя знать ни прочих наук, ни мирских дел. И что ещё хуже, люди, в ней не сведущие, не ощущают собственного невежества, а потому не ищут от него лекарства. И напротив того, знакомство с этой наукой подготовляет душу и возвышает её ко всякому прочному знанию, так что, если кто познал источники мудрости, касающиеся математики, и правильно применил их к познанию прочих наук и дел, тот сможет без ошибок и без сомнений, легко и по мере сил постичь и все последующие науки».

Роджер Бэкон (около 1214–1292) – английский философ и естествоиспытатель, монах-францисканец; профессор богословия в Оксфорде. Занимался математикой, химией и физикой.

Обратимся к основным понятиям аналитической геометрии на плоскости.

Понятие плоской линии. Уравнение линии. Рассмотрим на плоскости прямоугольную систему координат Oxy. Каждой точке ставятся в соответствие две координаты: x (абсцисса) и y (ордината). Помимо отдельных точек мы будем рассматривать на плоскости *линии*,[1] которые можно задать на плоскости Oxy уравнением $F(x, y) = 0$. Таким образом, линия представляет собой в заданной системе координат геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

[1] *Линия* на плоскости задаётся как множество точек, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Например, окружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удалённых на расстояние R от некоторой фиксированной точки O (центра окружности).

Заметим, что в общем случае уравнение $F(x, y) = 0$ не всегда определяет геометрический образ, который воспринимается нами как линия. Так, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет на плоскости Oxy лишь одну точку $(0,0)$, а уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ вообще не определяет никакого геометрического образа (пустое множество).

Введение прямоугольной системы координат на плоскости позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством пар чисел, что даёт возможность при решении геометрических задач применять алгебраические методы. Иными словами, уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием её уравнения.

Алгебраические линии на плоскости. Среди множества линий (кривых) на плоскости выделим важный класс линий, называемых *алгебраическими линиями.*

Алгебраической линией n-го порядка на плоскости назовём линию, определяемую алгебраическим уравнением n-й степени относительно двух переменных x и y.

Например, *линии 1-го порядка* определяются уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

в котором хотя бы один из коэффициентов A и B отличен от нуля ($A^2 + B^2 \neq 0$). *Линии 2-го порядка* определяются уравнением

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ и т.д.

1. Обратимся к различным *способам задания* прямой линии на плоскости. Выше мы говорили, что уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, может быть задано с помощью определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим другие способы.

Общее уравнение прямой. Прямая линия на плоскости может быть задана общим уравнением (1-й степени)

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{где } A^2 + B^2 \neq 0. \tag{1}$$

При этом вектор $\vec{n} = \{A, B\}$ перпендикулярен (ортогонален) прямой и называется *нормальным вектором* прямой, или *нормалью*.

В частности, уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{n} = \{A, B\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

При этом, если в уравнении (1):

а) $C = 0$, то уравнение $Ax + By = 0$ определяет прямую, проходящую через начало координат (поскольку координаты точки $(0, 0)$ удовлетворяют этому уравнению).

б) $B = 0$, то уравнение $Ax + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси Oy (поскольку нормальный вектор этой прямой $\vec{n} = \{A, 0\}$ ортогонален оси Oy).

в) $A = 0$, то уравнение $By + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси Ox (поскольку нормальный вектор этой прямой $\vec{n} = \{0, B\}$ ортогонален оси Ox).

г) $B = C = 0$, то уравнение $Ax = 0$ определяет координатную ось Oy (поскольку прямая параллельна оси Oy и проходит через начало координат).

д) $A = C = 0$, то уравнение $By = 0$ определяет координатную ось Ox (поскольку прямая параллельна оси Ox и проходит через начало координат).

Уравнение прямой в отрезках. В случае $C \neq 0$ разделим обе части общего уравнения на C и получим

$$Ax + By = -C, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Обозначим $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$. Полученное уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

называется *уравнением прямой в отрезках на координатных осях*. Такое название связано с тем, что прямая отсекает на координатных осях отрезки, величины которых (с учётом знака) равны a и b. Иными словами, эта прямая проходит через точки $(a, 0)$ и $(0, b)$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Любая прямая на плоскости (кроме прямых, параллельных оси Oy) может быть задана уравнением

$$y = kx + b,$$

где k называется *угловым коэффициентом* (он численно равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox), b называется *свободным членом*.

В частности, *уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент* k *и проходящей через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad \text{или} \;\; y = y_0 + k(x - x_0).$$

При $B \neq 0$ общее уравнение прямой делением на B может быть приведено к виду уравнения с угловым коэффициентом:

$$Ax + By + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad By = -Ax - C \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = kx + b.$$

Каноническое уравнение прямой. Назовём любой (ненулевой) вектор $\vec{l}$, параллельный данной прямой, *направляющим вектором* этой прямой. Тогда уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{l} = \{m, k\}$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{k}$$

и называется *каноническим уравнением* прямой.

Следует отметить, что в этом уравнении один из коэффициентов m или k может обращаться в нуль. Обращение одного из знаменателей в нуль означает, что и отвечающий ему числитель равен нулю. Например, уравнение $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{0} \Leftrightarrow (x-1)\cdot 0 = (y-3)\cdot 2$, т.е. задаёт прямую $y \equiv 3$.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через две (различные) точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Параметрические уравнения прямой непосредственно следуют из канонического уравнения прямой. В самом деле, примем за параметр t величину, равную левой и правой частям канонического уравнения:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{k} = t.$$

Заметим, что так как x и y в этом уравнении могут принимать произвольные действительные значения, то обе части канонического уравнения, а значит и параметр t, ничем не ограничены. Отсюда, разбивая на два уравнения, получаем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + kt, \;\; \text{где} \;\; t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Займёмся вопросом взаимного расположения двух прямых на плоскости. А именно, перейдём к рассмотрению условий параллельности, совпадения, пересечения в одной точке двух прямых, а также к нахождению угла между ними.

Условия параллельности прямых на плоскости. Пусть на плоскости даны две прямые: L_1 и L_2.

а) Если прямая L_1 задана общим уравнением $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, а прямая L_2, соответственно, уравнением $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то эти прямые параллельны (не имеют обших точек) тогда и только тогда, когда у них коэффициенты при x и y пропорциональны между собой, но не пропорциональны свободным членам:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

б) Если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_1x + b_1$, то условие параллельности равносильно равенству угловых коэффициентов этих прямых при неравных свободных членах:

$$\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 \neq b_2. \end{cases}$$

в) Если прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{k_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{k_2},$$

то условие их параллельности можно записать в виде условия параллельности их направляющих векторов $\vec{l_1} = \{m_1, k_1\}$ и $\vec{l_2} = \{m_2, k_2\}$:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

При этом если в знаменателе одной из дробей стоит нуль, то в числителе этой дроби также стоит нуль, т.е. эту пропорцию следует понимать в виде $m_1 \cdot k_2 = m_2 \cdot k_1$.

Условия совпадения двух прямых на плоскости.

а) Если прямая L_1 задана общим уравнением $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, а прямая L_2, соответственно, уравнением $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то эти прямые совпадают тогда и только тогда, когда у них все коэффициенты пропорциональны между собой:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

б) Если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_1x + b_1$, то условие их совпадения (отождествления) равносильно равенству как угловых коэффициентов, так и свободных членов:

$$\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Условия пересечения двух прямых на плоскости.

а) Если прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2 = 0$, то эти прямые пересекаются (в единственной точке) тогда и только тогда, когда у них коэффициенты при x и y непропорциональны между собой:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

Причём координаты точки пересечения могут быть найдены как решение системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

б) Если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_1x + b_1$, то они пересекаются тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты не равны:

$$k_1 \neq k_2.$$

Угол между прямыми на плоскости. Любые две пересекающиеся в одной точке прямые образуют два угла, в сумме равных π. Всегда достаточно найти один из этих углов. При этом угол между прямыми, очевидно, равен углу между их нормальными векторами.

а) Если прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2 = 0$, то угол φ между этими прямыми равен углу между их нормальными векторами, и косинус этого угла вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если косинус получился равен некоторому положительному числу p, то вы нашли косинус острого угла, а сам угол $\varphi = \arccos p$. Если же косинус оказался отрицателен (и равен p), то вы определили тупой угол, а острый равен $\pi - \arccos p$.

В частности, для получения *условия перпендикулярности* подставим в эту формулу $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тогда $\cos\varphi = 0$ и получим, что прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

б) Если прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_1x + b_1$, то косинус угла φ между ними может быть вычислен по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{k_1k_2 + 1}{\sqrt{k_1^2+1}\cdot\sqrt{k_2^2+1}},$$

откуда получаем *условие перпендикулярности* в виде $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

Для нахождения угла между прямыми в этом случае можно также воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Если вы хотите найти острый (меньший из двух) угол между прямыми, то в правой части последней формулы следует поставить модуль:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|,$$

и тогда $\varphi = \operatorname{arctg}\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Рассмотрим в дополнение ещё несколько важных на практике формул.

Простейшие задачи аналитической геометрии на плоскости.

1) *Расстояние между двумя точками.* Для любых двух точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ плоскости расстояние d между ними вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2) *Деление отрезка в заданном отношении.* Пусть точка M делит отрезок AB в заданном отношении $\frac{AM}{MB} = \lambda$. Задача состоит в том, чтобы по заданному числу λ и известным координатам точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ найти координаты точки $M(x_M, y_M)$:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, когда точка M делит отрезок AB пополам ($\lambda = 1$), получим

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Пример. Даны точки $A(1,1)$ и $B(7,4)$. Найти координаты принадлежащей отрезку AB точки $M(x,y)$, которая в два раза ближе к A, чем к B.

Решение. По условию $\dfrac{AM}{MB} = \lambda = \dfrac{1}{2}$, поэтому

$$x_M = \frac{x_1 + \frac{1}{2}x_2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 7}{1 + \frac{1}{2}} = 3, \quad y_M = \frac{y_1 + \frac{1}{2}y_2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{2} \cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = 2.$$

3) *Расстояние от точки до прямой.* Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$3x + 4y - 24 = 0 \quad \text{и} \quad 3x + 4y + 6 = 0.$$

Решение. Возьмём на одной из прямых, например на первой, произвольную точку $A(0,6)$. Тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки A до второй прямой:

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6.$$

2. Конические сечения, или основные кривые 2-го порядка. *Коническое сечение* — это пересечение плоскости с круговым конусом. Существуют три главных типа конических сечений: эллипс (окружность можно рассматривать как частный случай эллипса), парабола и гипербола, кроме того, существуют вырожденные сечения: точка, прямая и пара прямых.

При этом, если секущая плоскость проходит через начало координат, то получается вырожденное сечение. В невырожденном случае, если плоскость пересекает все образующие конуса в точках одной его полости, получаем эллипс, если плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса, получаем параболу, если секущая плоскость пересекает обе полости конуса, получаем гиперболу.[1]

[1] Все невырожденные конические сечения, кроме окружности, можно описать следующим способом. Выберем на плоскости точку F и прямую d и зададим вещественное число $\varepsilon \geq 0$. Тогда геометрическое место точек, для которых расстояние до точки F и до прямой d отличается в ε раз, является коническим сечением. Точка F называется ***фокусом*** конического сечения, прямая d — ***директрисой***, число ε — ***эксцентриситетом***. В зависимости от эксцентриситета, получится: при $\varepsilon > 1$ — гипербола; при $\varepsilon = 1$ — парабола; при $\varepsilon < 1$ — эллипс; для окружности полагают $\varepsilon = 0$ (хотя фактически при $\varepsilon = 0$ ГМТ является только точка F).

Перейдём к описанию указанных конических сечений, они же – наиболее известные *кривые 2-го порядка* на плоскости.[1]

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от заданной точки (называемой *центром окружности*). Окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ определяется уравнением (стандартного вида)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Если окружность задана общим уравнением $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, то, выделяя полный квадрат по обеим переменным, уравнение можно привести к стандартному виду.

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 + 16y - 9 = 0$.

Решение. Дополнив до полного квадрата, перепишем уравнение в виде

$$x^2 + (y^2 + 16y + 64) - 64 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y + 8)^2 = 73.$$

Таким образом, центр окружности находится в точке $O(0, -8)$, а её радиус равен $\sqrt{73}$.

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек (называемых *фокусами*) есть величина постоянная, бо́льшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эллипс имеет две оси симметрии, называемые *осями эллипса*. Точка пересечения осей носит название *центра* эллипса. Точки пересечения эллипса со своими осями называются *вершинами* эллипса. Положительные числа a и b называются полуосями эллипса. Если $a > b$, то a называется *бо́льшей полуосью* эллипса, а b, соответственно, – *ме́ньшей полуосью*, если $a < b$, то наоборот.

Если у эллипса полуоси равны ($a = b$), то эллипс превращается в окружность радиуса a.

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух данных точек (называемых

[1]В рамках классической механики траектория свободного движения сферических объектов в безвоздушном пространстве подчиняется закону всемирного тяготения, и вследствие этого является одной из конических кривых — параболой, гиперболой, эллипсом или прямой. Так, орбиты планет — эллипсы, траектории комет — эллипсы, гиперболы или «почти параболические», траектория полёта пушечного ядра — дуга эллипса.

фокусами) есть величина постоянная, ме́ньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Гипербола имеет две оси симметрии, которые называются *осями гиперболы.* Точка пересечения осей гиперболы называется *центром* гиперболы. Одна из осей гиперболы пересекается с гиперболой в точках, лежащих на оси Ox и называемых *вершинами* гиперболы. Если $y = 0$, то $x = \pm a$, т.е. вершины гиперболы имеют координаты $(\pm a, 0)$. Величины a и b называются, соответственно, *действительной* и *мнимой полуосями* гиперболы. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}$ определяют две *аси́мптоты.*

Уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

также определяет гиперболу, вершины которой лежат на оси Oy, и которая имеет те же асимптоты, что и гипербола (1). Эта гипербола называется *сопряжённой* по отношению к гиперболе (1).

Гипербола с равными полуосями ($a = b$) называется *равносторонней.*

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки (*фокус*) и от данной прямой, называемой *директрисой* и не проходящей через фокус.

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px \quad \text{или} \quad x^2 = 2py. \qquad (2)$$

Парабола $y^2 = 2px$ имеет *ось симметрии*, совпадающую с осью Ox. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется *вершиной* параболы. Вершина находится в начале координат, а сама парабола – при $p > 0$ расположена в правой полуплоскости $x \geq 0$, а при $p < 0$ в левой полуплоскости $x \leq 0$. Фокус находится на оси параболы и имеет координаты $F(\frac{p}{2}, 0)$. Директриса имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$.

Заметим, что помимо указанных выше кривых второго порядка существуют другие линии, задаваемые уравнениями 2-й степени, например, уравнение

$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \quad \text{определяет пару пересекающихся прямых.}$$

Подведём итоги: пусть в прямоугольной системе координат задано общее уравнение линии второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Тогда существует такая прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из следуюших девяти канонических видов: 1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс), 2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ (мнимый эллипс), 3) $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ (пара мнимых пересекающихся прямых), 4) $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ (пара пересекающихся прямых), 5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (гипербола), 6) $y^2 = 2px$, $x^2 = 2py$ (парабола), 7) $y^2 - a^2 = 0$, $x^2 - a^2 = 0$ (пара параллельных прямых), 8) $y^2 + a^2 = 0$, $x^2 + a^2 = 0$ (пара мнимых параллельных прямых), 9) $y^2 = 0$, $x^2 = 0$ (пара совпавших прямых).

Пример. Приведя уравнение к каноническому виду, определить тип кривой второго порядка:

$$x^2 + 2y^2 - 4x + 16y = 0.$$

Решение. Выделяя полные крадраты, перепишем уравнение в виде

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + 2(y^2 + 8y + 16) - 32 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + 2(y+4)^2 = 36,$$

$$\text{или} \quad \frac{(x-2)^2}{6^2} + \frac{(y+4)^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1.$$

Следовательно, кривая представляет собой эллипс с полуосями $a = 6$, $b = 3\sqrt{2}$, центр которого находится в точке $(2, -4)$.

6.3.2 Аналитическая геометрия в пространстве

«Большинство так называемых культурных людей, не связанных с математикой по роду своих занятий, считает совершенно допустимым не иметь об этой науке ни малейшего представления. Математика для них – нечто в высшей степени скучное, сухое и отвлечённое... В наиболее печальных случаях считается, что это почти то же самое, что занятие бухгалтерией».

Норберт Винер (англ. Norbert Wiener; 1894–1964) – американский учёный, выдающийся математик и философ, основоположник кибернетики и теории искусственного интеллекта.

В трёхмерном пространстве, в отличие от плоскости, возникают новые понятия – поверхности, объёмного тела и пространственной кривой.

Поверхности в пространстве. Рассмотрим в трёхмерном пространстве прямоугольную систему координат с взаимно перпендикулярными осями: Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликáт.

Уравнение с тремя неизвестными, записанное в общем виде

$$F(x, y, z) = 0,$$

определяет в пространстве $Oxyz$ некоторую *поверхность* S и называется, соответственно, *уравнением* этой *поверхности*. Можно сказать, что поверхность S представляет собой в заданной системе координат геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.[1]

Конечно, не всякому уравнению $F(x, y, z) = 0$ соответствует реальный геометрический образ. Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ задаёт в пространстве пустое множество. А уравнение $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ определяет в декартовой системе координат сферу радиуса $R > 0$ с центром в точке (a, b, c).

Поверхность S в пространстве называется *алгебраической поверхностью n-го порядка*, если эта поверхность в некоторой декартовой системе координат определяется алгебраическим уравнением n-й степени с тремя переменными x, y, z.

Например, общее уравнение *алгебраической поверхности 1-го порядка* имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где хотя бы один из трёх коэффициентов A, B или C отличен от нуля.

Кривые в пространстве. *Линию*, или *кривую*, в пространстве обычно рассматривают как пересечение двух поверхностей. Таким образом, *два уравнения*

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

определяют линию L, т.е. являются *уравнениями этой линии.*

Мы рассмотрели так называемый *неявный способ задания* поверхностей и кривых в пространстве. В частности, если из уравнения $F(x, y, z) = 0$ удаётся, например, выразить переменную z, то приходим к *явному уравнению поверхности*: $z = f(x, y)$.

Однако существуют и другие способы задания кривых и поверхностей в пространстве, например, параметрический способ.

[1] Иногда для упрощения вида уравнения используют не декартову прямоугольную, а другую (например, сферическую) систему координат. И в этой ситуации вместо уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в декартовых координатах получаем существенно более простое уравнение в сферических координатах: $r = R$.

Параметрические уравнения линии и поверхности в пространстве. *Параметрические уравнения линии* L в пространстве, определяющие координаты x, y и z любой точки этой линии как три непрерывные функции

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t \in [t_0, t_1], \end{cases}$$

естественно возникают, если эту линию рассматривать как путь, пройденный материальной точкой за время t, отсчитываемое от некоторого начального момента t_0 и до момента t_1, а функции рассматривать как закон движения этой точки. Переменная t при этом называется *параметром*, а сама линия в этой ситуации является *траекторией движения* материальной точки.

Для *параметрического задания поверхности* S координаты любой точки этой поверхности должны быть заданы уже как непрерывные функции не одного, а *двух параметров* u и v

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Omega. \end{cases}$$

Например, сфера радиуса R с центром в начале координат задаётся системой параметрических уравнений

$$\begin{cases} x = R \sin\theta \cos\varphi, \\ y = R \sin\theta \sin\varphi, \\ z = R \cos\theta, \end{cases}$$

где параметры θ и φ представляют собой угловые сферические координаты (широту и долготу) точек поверхности сферы. Обычно полагают $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

1. Обратимся к *способам задания плоскости* в пространстве.

Общее уравнение плоскости. Уравнение первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \text{где} \ \ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0,$$

определяет *плоскость* и называется *общим уравнением* плоскости.

Таким образом, плоскость – это *поверхность 1-го порядка.* При этом вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ перпендикулярен (ортогонален) плоскости и называется *нормальным вектором* плоскости, или *нормалью* к плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **перпендикулярно заданному вектору** $\vec{n} = \{A, B, C\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Рассмотрим частные случаи.

1) Если $D = 0$, то уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат.

2) Если $A = 0$, то уравнение $By + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox.

В случае $B = 0$ уравнение $Ax + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси Oy, а в случае $C = 0$ – параллельную оси Oz.

3) Если $A = B = 0$, то уравнение $Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости Oxy. Аналогично, уравнение $By + D = 0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости Oxz, а уравнение $Ax + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости Oyz.

4) Если $A = B = D = 0$, то уравнение $Cz = 0$ определяет координатную плоскость Oxy. Аналогично, уравнение $By = 0$ определяет координатную плоскость Oxz, а уравнение $Ax = 0$ – координатную плоскость Oyz.

Уравнение плоскости в отрезках. В случае $D \neq 0$ разделим обе части общего уравнения на D и получим

$$Ax + By + Cz = -D, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Обозначим $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$. Полученное уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

называется *уравнением плоскости в отрезках на координатных осях.*

Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ **и** $C(x_3, y_3, z_3)$, **не лежащие на одной прямой:**

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Рассмотрим различные случаи *взаимного расположения двух плоскостей* в пространстве.

Условия параллельности плоскостей в пространстве. Рассмотрим в пространстве две плоскости π_1 и π_2, заданные общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Эти плоскости параллельны (не имеют обших точек) тогда и только тогда, когда у них коэффициенты при x, y и z пропорциональны между собой, но не пропорциональны свободным членам:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

Условия совпадения двух плоскостей в пространстве. Плоскости совпадают тогда и только тогда, когда у них все коэффициенты пропорциональны между собой:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Условия пересечения двух плоскостей в пространстве. Если какое-нибудь из равенств в соотношении

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

нарушается, то плоскости пересекаются (по прямой), и эта прямая задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Угол между плоскостями в пространстве. Любые две пересекающиеся плоскости образуют два двугранных угла, сумма угловых величин которых равна π. Достаточно найти один из этих углов.

Поскольку угол φ между плоскостями равен углу между их нормальными векторами $\vec{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$, то он может быть вычислен по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности, для получения условия перпендикулярности подставим в эту формулу $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тогда $\cos\varphi = 0$ и получим, что плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

3. Рассмотрим теперь *способы задания прямой* в пространстве.

Канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{l} = \{m, k, p\}$, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{k} = \frac{z - z_0}{p}$$

и называются *каноническими уравнениями* прямой.

Уравнения прямой, проходящей через две различные точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Параметрические уравнения прямой вытекают из канонических уравнений. В самом деле, введём параметр t:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{k} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

Отсюда, разбивая на три уравнения, получаем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + kt, \\ z = z_0 + pt, \ \text{где} \ \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{k_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \qquad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{k_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

определяется как угол между их направляющими векторами $\vec{l_1} = \{m_1, k_1, p_1\}$ и $\vec{l_2} = \{m_2, k_2, p_2\}$:

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + k_1k_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + k_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + k_2^2 + p_2^2}}.$$

В частности, отсюда при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получаем *условие перпендикулярности* двух прямых:

$$m_1 m_2 + k_1 k_2 + p_1 p_2 = 0.$$

4. Рассмотрим взаимное расположение *прямой и плоскости* в пространстве. Пусть даны прямая $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{k} = \dfrac{z - z_1}{p}$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$.

Угол φ между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bk + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + k^2 + p^2}}.$$

Условие ортогональности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{k} = \frac{C}{p}.$$

Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве.

1) *Расстояние между двумя точками.* Для любых двух точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ пространства расстояние d между ними вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2) *Деление отрезка в заданном отношении.* Пусть точка $M(x_M, y_M, z_M)$ делит отрезок AB, где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, в заданном отношении $\frac{AM}{MB} = \lambda$. Тогда координаты точки M вычисляются по формулам:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, когда точка M делит отрезок AB пополам ($\lambda = 1$), получим

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3) *Расстояние от точки до плоскости.* Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приведём в заключение уравнения наиболее известных *поверхностей 2-го порядка* в пространстве. К ним относятся: эллипсóид (сфера), эллиптический параболóид, однопóлостный и двупóлостный гиперболóиды, конус, эллиптический, параболический и гиперболический цилиндры.[1]

1. **Эллипсоид** определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где положительные числа a, b, c называются его *полуосями*. Линии пересечения эллипсоида с плоскостями, параллельными координатным осям, являются эллипсами.

Если две из трёх полуосей эллипсоида имеют одинаковую длину (например, $a = b$), то эллипсоид становится *эллипсоидом вращения*[2] (сфероидом). Эллипсоид вращения — это поверхность в трёхмерном пространстве, образованная при вращении эллипса вокруг одной из его главных осей.

Если $a = b = c$, то эллипсоид превращается в *сферу* радиуса a:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

2. **Однополостный гиперболоид**[3] задаётся уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a и b — действительные полуоси, а c — мнимая полуось.

3. **Двуполостный гиперболоид** задаётся уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где a и b — мнимые полуоси, а c — действительная полуось. Если $a = b$, то такая поверхность называется *гиперболоидом вращения*. Однополостный гиперболоид вращения может быть получен вращением гиперболы вокруг её мнимой оси, двухполостный — вокруг действительной.

[1] Изображения этих поверхностей найдите самостоятельно.

[2] Форма Земли — в хорошем приближении представляет собой сплюснутый эллипсоид вращения.

[3] Название «*гиперболоид*» происходит от того, что среди сечений этой поверхности есть гиперболы. Таковы, в частности, сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$. Телевизионная башня на Шаболовке в Москве была сконструирована академиком инженером В.Г. Шуховым в 1920—1922 годах в форме однополостного гиперболоида. Другой пример – вазы для цветов часто делают в форме однополостного гиперболоида.

Двуполостный гиперболоид вращения также является геометрическим местом точек P пространства, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек A и B постоянен: $|AP - BP| = const$. В этом случае A и B называются *фокусами* гиперболоида.

4. **Конус**[1] задаётся уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

5. **Эллиптический параболоид**[2] задаётся уравнением:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Данная поверхность расположена в верхнем полупространстве $z \geq 0$ и касается координатной плоскости Oxy в единственной точке (начале координат). В сечении поверхности координатными плоскостями Oxz и Oyz получаются, соответственно, параболы $z = \frac{x^2}{a^2}$ и $z = \frac{y^2}{b^2}$. Сечением поверхности горизонтальной плоскостью $z = z_0$ является эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z_0$.

6. **Эллиптический цилиндр**[3] задаётся уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ось данного цилиндра совпадает с осью Oz, а в сечении цилиндра плоскостью $z = z_0$ получается эллипс.

7. **Гиперболический цилиндр** задаётся уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

8. **Параболический цилиндр** задаётся уравнением:

$$y^2 = 2px \quad \text{и др.}$$

Лекция: Савватеев А. Алгебра для всех:

https://www.youtube.com/playlist?list=PLgEpoT7yAl9VXtZa0ZiWdbp0oqOw1AteC

[1] Пример конуса в быту – песочные часы.

[2] *Параболóид* может быть охарактеризован как незамкнутая нецентральная (то есть не имеющая центра симметрии) поверхность второго порядка.

[3] *Цилиндр* – поверхность, образуемая движением прямой (образующей), перемещающейся параллельно самой себе и пересекающей данную линию (направляющую). Направляющей цилиндрической поверхности второго порядка служит алгебраическая линия второго порядки. В зависимости от вида направляющей различают эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболическнй цилиндр.

7 ЛЕКЦИЯ: Кратные и криволинейные интегралы. Ряды

«Он стал поэтом — для математика у него не хватало фантазии».
Давид Гильберт (1862–1943, немецкий математик-универсал, внёс значительный вклад в развитие многих областей математики) об одном из своих учеников.

Краткое содержание.

Раздел: Интегральное исчисление функций многих переменных.

I. Двойной интеграл. Понятие двойного интеграла как предела интегральной суммы, его основные свойства (линейность, аддитивность, интегрируемость произведения, интегрирование неравенств и др.) и геометрический смысл. Интегрируемость непрерывных функций. Вычисление двойного интеграла сведением его к повторным интегралам. Двойные интегралы от функций с разделяющимися переменными. Ограниченность функции как необходимое условие интегрируемости. Замена переменных в двойном интеграле. Якобиан перехода к полярным координатам. Приложения двойного интеграла: вычисление объёмов тел, площадей плоских фигур, массы плоских пластин и их координат центра масс.

II. Криволинейный интеграл. Понятие криволинейного интеграла от функции двух переменных (1-го рода) и его геометрический смысл. Вычисление криволинейных интегралов сведением к интегралу Римана (для явно и параметрически заданных функций). Приложения криволинейного интеграла: вычисление длины дуги плоской кривой, массы дуги (по известной плотности распределения массы) и координат центра тяжести. Существование других видов интегралов (тройных и m-кратных ($m > 3$), криволинейных по пространственным кривым, поверхностных и др.

Раздел: Математический анализ. Теория рядов.

III. Ряды. Понятие числового ряда. Частичная сумма ряда. Сходящийся и расходящийся ряд. Необходимое условие сходимости. Знакопостоянные и знакочередующиеся ряды. Необходимое и достаточное условие сходимости для знакоположительных рядов. Признак сравнения. Предельный признак сравнения (достаточные условия сходимости). Признаки Даламбера и Коши. Гармонический ряд.

Литература.

[1]. Разд. 5 (Ряды). Гл. 13 (Числовые ряды). Гл. 14 (Степенные ряды). Разд. 6 (Функции нескольких переменных). Гл. 15 (Функции нескольких переменных). п.15.10 (Понятие двойного интеграла).

[2]. Часть 2 (Математический анализ функций нескольких переменной). Гл. 13 (Интегрирование). Часть 3 (Ряды, дифференциальные уравнения). Гл. 14 (Ряды)

[3]. Гл. 16 (Двойные и тройные интегралы). Гл. 17 (Ряды).

7.1 Интегралы функций нескольких переменных

7.1.1 Двойные интегралы

«Нигде, как в математике, ясность и точность вывода не позволяет человеку отвертеться от ответа разговорами вокруг вопроса».

А.Д. Александров (1912—1999) — советский математик, физик, философ, альпинист.

В данном разделе мы затронем некоторые вопросы, связанные с интегрированием функций нескольких переменных. В отличие от случая одной переменной здесь не удаётся ввести понятия первообразной и неопределённого интеграла. В то же время определённый интеграл вводится аналогично: интегрирование рассматривается как предел интегральной суммы («суммирование бесконечного числа бесконечно малых величин»).

Двойные, тройные и, вообще, кратные интегралы – это *обобщение понятия обычного определённого интеграла Римана.*

Понятие двойного интеграла. Пусть в трёхмерном пространстве задана декартова (прямоугольная) система координат $Oxyz$. Вначале определим двумерный аналог интегральной суммы. Рассмотрим ограниченную замкнутую область D на плоскости Oxy. Будем считать, что она имеет площадь (квадрируема).

В пространстве $Oxyz$ рассмотрим объёмное тело, ограниченное снизу областью D, сверху – поверхностью $z = f(x, y)$, где $f(x, y) \geq 0$ – непрерывная функция, а с боков – вертикальной цилиндрической поверхностью, проведённой по границе области D. Тело указанного вида принято называть *цилиндроидом.*[1]

[1]В частном случае, когда верхнее основание цилиндроида есть плоскость, параллельная нижнему основанию, то такой цилиндроид называется *цилиндром.* Наиболее известен *круговой цилиндр* с основаниями в форме кругов.

Рассмотрим задачу о вычислении объёма такого цилиндроида. Для этого разобьём его основание D сетью произвольных кривых на конечное число элементарных ячеек (например, это можно сделать с помощью прямых, параллельных осям координат Ox и Oy – *прямоугольная сетка*). Перенумеруем все ячейки, в которые попала хотя бы часть области D. Тогда ij-ая ячейка $\triangle D_{ij}$ имеет вид прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям, и длины этих сторон равны, соответственно, $\triangle x_i$ и $\triangle y_j$, а поэтому площадь ячейки равна $\triangle S_{ij} = \triangle x_i \cdot \triangle y_j$. В каждой из этих ячеек выберем произвольным образом точку (x_i, y_j) и вычислим значение функции в этой точке $f(x_i, y_j)$. Рассмотрим цилиндрические столбики, имеющие своими основаниями ячейки $\triangle D_{ij}$ и высоту, равную $f(x_i, y_j)$. Объём каждого из этих столбиков равен $\triangle V_{ij} = f(x_i, y_j)\triangle x_i \triangle y_j$. А объём всех таких столбиков в совокупности приближённо равен объёму данного тела.

Составим двумерную интегральную сумму вида

$$\sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\triangle x_i \triangle y_j = \sum_i \sum_j \triangle V_{ij}.$$

Проводя дополнительные линии, увеличивая за счет этого количество ячеек, будем уменьшать размер ячеек, при этом получая всё более точное приближённое значение для объёма тела. Перейдём к пределу, устремив к нулю максимальный размер ячейки разбиения $\triangle D_{ij}$:

$$\lim_{\substack{\max|\triangle x_i|\to 0 \\ \max|\triangle y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\triangle x_i \triangle y_j.$$

Если этот предел существует и конечен (и не зависит ни от способа разбиения области интегрирования D на элементарные ячейки, ни от выбора в каждой такой ячейке точки (x_i, y_j)), то его называют *двойным* (определённым) *интегралом* от функции двух переменных $z = f(x, y)$ по области D и обозначают символом

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

При этом D называется *областью интегрирования*, подынтегральная функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой* по области D, а $dxdy = dS$ – *элементом площади* (дифференциалом площади).

Геометрический смысл двойного интеграла состоит в том, что если функция $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в области D, то двойной интеграл численно равен *объёму* прямого цилиндрического тела (цилиндроида), построенного на области D как на основании и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$.

Если $f(x, y) \equiv 1$ при всех $(x, y) \in D$, то интеграл численно равен площади S области D:

$$S = \iint\limits_{D} dxdy.$$

Теорема (*достаточные условия существования двойного интеграла*). Если область D ограничена в плоскости Oxy и замкнута (т.е. её граница принадлежит области), а функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, то двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy$ существует.

Основные свойства двойных интегралов. Так как двойные интегралы являются естественным обобщением понятия определённого интеграла на случай функции двух переменных, то им свойственны все основные особенности этих интегралов.

1. *Линейное свойство.* Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D, а α и β – любые действительные числа, то функция $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$ также интегрируема в области D, причём

$$\iint\limits_{D} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))dxdy = \alpha \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy + \beta \iint\limits_{D} g(x, y)dxdy.$$

2. *Аддитивность.* Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D и если область D разбивается некоторой кривой Γ на две не имеющие общих внутренних точек области D_1 и D_2, то функция $f(x, y)$ интегрируема в каждой из областей D_1 и D_2, причём

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

3. *Интегрируемость произведения.* Если каждая из функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируема в области D, то и произведение этих функций интегрируемо в данной области.

4. *Интегрирование неравенств.* Если обе функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы в области D и всюду в этой области $f(x, y) \leq g(x, y)$, то для интегралов выполняется соответствующее неравенство:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

5. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области D, то и функция $|f(x,y)|$ интегрируема в области D, причём

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy.$$

Вычисление двойных интегралов сведением к повторным интегралам. На практике значения двойных интегралов вычисляют при помощи сведения к так называемым *повторным интегралам*. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, то рассмотренные ниже повторные интегралы существуют (как и двойной интеграл). В общем случае кратный интеграл от функции нескольких переменных может существовать, в то время как повторные интегралы от этой функции не существуют. Может случиться также, что повторные интегралы от функции существуют, а кратный интеграл от этой же функции не существует. Но если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D, то повторные интегралы от этой функции существуют, равны между собой и каждый из них равен кратному интегралу от $f(x,y)$ по области D.

Рассмотрим простейшие случаи, когда двойной интеграл может быть сведён к повторному интегралу.

1. Прямоугольная область. Пусть область интегрирования D имеет прямоугольный вид (изобразите на рисунке):

$$D = \{(x,y)\,\big|\, a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}.$$

Тогда двойной интеграл вычисляется по формулам:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx,$$

(двумерные аналоги формулы Ньютона-Лейбница), где два последних интеграла называются *повторными*, поскольку в каждом из них вначале вычисляется «внутренний» интеграл, а уже затем – «внешний» интеграл. Так, при вычислении повторного интеграла $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$ сначала находится интеграл $\varphi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$ (при этом переменная x фиксируется), и лишь затем вычисляется интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

Таким образом, вычисление двойного интеграла сводится к последовательному интегрированию сначала по одной, а затем по другой переменной. В данном случае значение вычисляемого интеграла не зависит от порядка, в котором проводится интегрирование.

Пример 1. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_D xydxdy, \quad \text{где } D = \{(x,y)\,\big|\, 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}.$$

Решение. В соответствии с формулой сводим двойной интеграл к повторному:

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_1^2 dy \int\limits_1^2 xydx.$$

Вычисляем внутренний интеграл, считая y постоянным:

$$\int\limits_1^2 xydx = y\int\limits_1^2 xdx = y \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = y\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3y}{2}.$$

Вычисляем внешний интеграл, для чего полученную функцию интегрируем по y в пределах от 1 до 2:

$$I = \int\limits_1^2 \left(\frac{3y}{2}\right) dy = \frac{3}{2} \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

2. Случай криволинейной области, стандартной относительно оси Oy. Пусть теперь область интегрирования D ограничена снизу и сверху, соответственно, двумя непрерывными кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, а с боков – вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (изобразите на рисунке):[1]

$$D = \{(x,y)\,\big|\, a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}.$$

Тогда двойной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

[1]Будем говорить в этом случае, что область D задана *стандартно относительно оси Oy*.

3. Случай криволинейной области, стандартной относительно оси Ox. Пусть область интегрирования D ограничена слева и справа, соответственно, двумя непрерывными кривыми $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$, а снизу и сверху – горизонтальными прямыми $y = c$ и $y = d$ (изобразите на рисунке):[1]

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}.$$

Тогда двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx.$$

Пример 2. С помощью двойного интеграла вычислить двумя способами (сводя к разным повторным интегралам) площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $x = 1$, $y = x^2$, $y = 0$.

Решение. Нарисуем область интегрирования.

1-й способ. Опишем эту область как стандартно заданную относительно оси Oy:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

Найдём вначале внешние пределы интегрирования a и b: так как $0 \le x \le 1$, то $a = 0$, $b = 1$. Чтобы найти пределы интегрирования во внутреннем интеграле, при каждом $x \in [a, b]$ начинаем мысленно двигаться снизу вверх. При этом руководствуемся следующим правилом: попадаем в область D, пересекая нижнюю границу интегрирования $y = y_1(x)$, а выходим из области, пересекая верхнюю границу интегрирования $y = y_2(x)$.

Таким образом, приходим к повторному интегралу

$$S = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} dy = \int\limits_0^1 \left(y\Big|_0^{x^2} \right) dx = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2-й способ. Опишем эту область как заданную стандартно относительно оси Ox:

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx.$$

Так как фигура лежит в пределах $0 \le y \le 1$, то $c = 0$, $d = 1$. Теперь, чтобы найти пределы интегрирования по x, представим мысленно, что мы движемся слева направо, пересекая фигуру. Руководствуемся правилом: мы входим в фигуру, пересекая левую границу интегрирования $x = x_1(y)$, а выходим из фигуры, пересекая правую границу интегрирования

[1] Будем говорить, что область D задана *стандартно относительно оси Ox*.

$x = x_2(y)$. Здесь левая граница – это $x \equiv 0$, а правая граница образована кривой $y = x^2$. Отсюда и найдём $x = x_2(y)$, выражая x через y: $x = \sqrt{y}$.

Поэтому второй из повторных интегралов имеет вид.

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^1 dx = \int\limits_0^1 \left(x\Big|_{\sqrt{y}}^1 \right) dy = \int\limits_0^1 (1 - \sqrt{y})dy = (y - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}})\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 3. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования в том и другом порядке, где D – трапеция с вершинами $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,2)$, $C(1,0)$.

Решение. Изобразим трапецию $OABC$ (область интегрирования) на плоскости. Тогда двойной интеграл по этой трапеции может быть сведён к одному из следующих двух повторных интегралов:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1+x} f(x,y)dy;$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y-1}^1 f(x,y)dx$$

(во втором случае из-за разных пределов интегрирования понадобилось разбить область интегрирования на две части).

Двойной интеграл от функции с разделяющимися переменными. Если область D представляет собой прямоугольник

$$D = \{(x,y) \,\big|\, a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

и у подынтегральной функции разделяются переменные: $f(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$, где функция $X(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а функция $Y(y)$ непрерывна на $[c,d]$, то

$$\iint\limits_D X(x)Y(y)dxdy = \int\limits_a^b X(x)dx \cdot \int\limits_c^d Y(y)dy,$$

т.е. двойной интеграл равен произведению двух однократных интегралов.

Пример 4. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_D xydxdy, \quad \text{где } D = \{(x,y) \,\big|\, 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2\}.$$

Решение. В соответствии с формулой разделяем переменные и сводим двойной интеграл к произведению двух однократных:

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_1^2 xdx \cdot \int\limits_1^2 ydy = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

В случае более сложного вида области D она разбивается на конечное число частей рассмотренного выше типа.

Ограниченность функции – необходимое условие интегрируемости. В определении двойного интеграла мы предполагали, что функция $f(x, y)$ ограничена. Как и для функции одной переменной, это условие является необходимым условием интегрируемости.

Теорема (*необходимое условие интегрируемости*). Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D, то она ограничена в этой области.

Однако условие ограниченности, как и в случае с обычным определённым интегралом, не является достаточным, т.е. существуют ограниченные, но не интегрируемые функции.

Примером такой функции является функция (двумерный аналог функции Дирихле́)

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ и } y \text{ – рациональны,} \\ 0, & \text{если } x \text{ и } y \text{ – иррациональны} \end{cases}$$

(в остальных точках функция не определена.) Функция не интегрируема в любой замкнутой ограниченной области, так как если в определении двойного интеграла в качестве промежуточных точек в каждой ячейке разбиения выбирать точки (x_i, y_j) с рациональными координатами, то предел интегральных сумм будет один, а если брать точки (x_i, y_j) с иррациональными координатами, то предел будет уже другой. Таким образом, предел интегральной суммы зависит от выбора промежуточных точек, а значит, не существует.

Замена переменных в двойном интеграле. Предположим, что мы хотим перейти в двойном интеграле

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy$$

от переменных интегрирования x и y к другим переменным интегрирования u и v, причём «старые» и «новые» переменные связаны равенствами (*формулы преобразования* переменных x и y в переменные u и v):

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{1}$$

Предполагается, что каждой точке $(x, y) \in D$ по этим формулам ставится в соответствие единственная точка (u, v) (все эти точки (u, v) образуют некоторую область G в плоскости прямоугольных координат (u, v)), и наоборот, каждой точке $(u, v) \in G$ отвечает та же пара $(x, y) \in D$; т.е. формулы (1) осуществляют взаимно однозначное преобразование области D (на плоскости (x, y)) в область G (на плоскости (u, v)). Тогда x и y можно однозначно определить из (1):

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{2}$$

(*формулы обратного преобразования* переменных u и v в переменные x и y).

При сделанных предположениях можно показать, что если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D, функции (2) имеют в ограниченной замкнутой области G непрерывные частные производные первого порядка и определитель[1]

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{3}$$

отличен в G от нуля, то для двойного интеграла справедлива формула замены переменных:

$$\iint\limits_D f(x, y) dx dy = \iint\limits_G f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$

Замена переменных обычно используется для приведения интеграла к виду, более удобному для последующего вычисления.

Пример 5. Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_D (2x - y) dx dy,$$

где D – параллелограмм, ограниченный прямыми $x+y = 1$, $x+y = 2$, $2x-y = 1$, $2x-y = 3$.

Решение. Непосредственное вычисление этого интеграла, если не делать замену переменных, достаточно громоздкое, так как для сведения его к любому из повторных интегралов (сначала по y, а затем по x, или наоборот) необходимо разбить область интегрирования D на три подобласти и, соответственно, вычислить три интеграла (сделайте рисунок, чтобы увидеть это). Однако простая замена переменных

$$u = x + y, \quad v = 2x - 1 \tag{1}$$

[1] Определитель (3) называется *функциональным определителем*, или *якоби́аном перехода* (по имени немецкого математика Якоби).

сделает пределы интегрирования постоянными, а значит, задача существенно упростится. Наклонные прямые $x+y=1$, $x+y=2$ (в системе координат Oxy) переходят в прямые $u=1$, $u=2$ (в системе координат $O'uv$), а наклонные прямые $2x-y=1$, $2x-y=3$ переходят в прямые $v=1$, $v=3$. В результате область интегрирования из параллелограмма D (в системе координат Oxy) преобразуется в прямоугольник G со сторонами, параллельными новым осям координат (в системе координат $O'uv$). И при вычислении интеграла вместо трёх повторных интегралов получим всего один.

Для реализации замены переменных надо вычислить модуль якобиана. Вычислим якобиан: формулы преобразования имеют вид $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. Приведём их к виду $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. В данном случае это несложно сделать: $x=\frac{1}{3}(u+v)$, $y=\frac{1}{3}(2u-v)$. Тогда якобиан находим по формуле

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad |J|=\frac{1}{3}.$$

В результате перехода к новым переменным интегрирования получаем

$$I=\iint\limits_D (2x-y)dxdy=\iint\limits_G |J|vdudv=\frac{1}{3}\int\limits_1^2 du\cdot\int\limits_1^3 vdv=\frac{1}{3}\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_1^3=\frac{4}{3}.$$

Переход к полярным координатам. Если подынтегральная функция и (или) уравнение границы области интегрирования содержат выражение x^2+y^2, то во многих случаях вычисление двойного интеграла упрощается, если перейти из прямоугольной системы координат в полярную по формулам

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi,$$

так как выражение x^2+y^2 принимает более простой вид r^2.

Вычислим якобиан перехода к полярным координатам:

$$J=\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r \quad \Rightarrow \quad |J|=r.$$

Пример 6. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy,$$

где D – четверть круга $x^2+y^2=1$, расположенная в I квадранте.

Решение. Перейдём к полярным координатам: якобиан $J=r$, область интегрирования G в полярных координатах описывается неравенствами : $0\le r\le 1$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, т.е. G принимает вид прямоугольника. Поэтому

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_G e^{r^2}rdrd\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 re^{r^2}dr.$$

Так как область прямоугольна, а переменные разделяются, то данный повторный интеграл равен произведению двух однократных интегралов:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 e^{r^2} d(r^2) = \frac{\pi}{4} \cdot e^{r^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}(e-1).$$

Некоторые приложения двойных интегралов.

1. *Вычисление объёмов тел.* Объём V криволинейного цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y) \geq 0$, снизу плоскостью $z = 0$, с боковых сторон – цилиндрической поверхностью, у которой образующие параллельны оси Oz, а направляющей служит граница области D, вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Пример 7. Вычислить объём тела (пирамиды), ограниченного поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Решение. Изобразим пространственную фигуру в системе координат $Oxyz$. Плоскость $x+y+z = 1$ пересекает координатные оси в точках $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, т.е. плоскости $z = 0$ и $x + y + z = 1$ пересекаются по прямой $x + y = 1$. Поэтому проекцией тела на плоскость Oxy будет треугольная область $D = \{(x,y) \,\big|\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\}$, а объём равен

$$V = \iint\limits_D (1-x-y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)dy = \int_0^1 \left((1-x)y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2x+x^2)dx = \frac{1}{2}\left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

2. *Вычисление площадей плоских фигур.* Площадь S области D вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

Пример 8. Найти площадь области D, ограниченной линиями $y^2 = x + 1$, $x + y = 1$.

Решение. Изобразим область на плоскости: слева она ограничена параболой $y^2 = x+1$, а справа – прямой $y = -x+1$. Находим точки пересечения параболы с прямой: $M_1(3,-2)$, $M_2(0,1)$. Следовательно, искомая площадь

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int_{-2}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y} dx = \int_{-2}^1 (2-y-y^2)dy = \frac{9}{2}.$$

3. *Вычисление массы плоских пластин.* Рассмотрим на плоскости Oxy материальную плоскую пластину в виде области D, по которой распределена масса M с известной функцией плотности распределения массы $\rho(x,y)$. Тогда масса пластины вычисляется по формуле

$$M = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy.$$

4. *Вычисление координат центра масс плоской пластины.* В условиях предыдущей формулы координаты центра масс пластины вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy}{M}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy}{M},$$

где $M = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$ – масса пластины.

Если пластина однородная (т.е. $\rho \equiv const$), то формулы принимают вид

$$x_c = \frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}.$$

7.1.2 Криволинейные интегралы на плоскости

Мы познакомились уже с несколькими видами интегралов: неопределённым и определённым интегралами (от функций 1-й переменной), двойными интегралами (от функций двух переменных). Рассмотрим ещё одно обобщение понятия определённого интеграла (там в качестве области интегрирования выступал отрезок $[a,b]$ оси Ox) на случай, когда областью интегрирования является *дуга некоторой кривой.* Такие интегралы назвали *криволинейными.* Они также имеют широкое применение в математике.

Различают два типа криволинейных интегралов. Рассмотрим понятие криволинейного интеграла на примере криволинейного интеграла 1-го рода.

Понятие криволинейного интеграла 1-го рода. Пусть на плоскости Oxy дана некоторая гладкая или кусочно-гладкая[1] кривая AB.

[1]Кривая, заданная уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, называется *гладкой*, если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные $x'(t)$, $y'(t)$, не обращающиеся в нуль од-

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ определена и ограничена на кривой AB.

Разобьём кривую AB произвольно на n частей последовательно расположенными точками $A = M_0$, $M_1, ..., M_n = B$ и выберем на каждой из образовавшихся частичных дуг $M_{i-1}M_i$, $i = \overline{1, n}$, произвольную точку N_i. Составим интегральную сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\triangle l_i, \tag{1}$$

где $\triangle l_i$ – длина дуги $M_{i-1}M_i$. Назовём эту сумму *интегральной суммой* для функции $z = f(x, y)$ по кривой AB. Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \triangle l_i$ – наибольшая из длин частичных дуг.

Если интегральная сумма (1) при $\lambda \to 0$ имеет конечный предел, то этот предел называется *криволинейным интегралом 1-го рода* от функции $z = f(x, y)$ *по кривой* AB и обозначается символом

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl.$$

В этом случае функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой вдоль кривой* AB, сама кривая AB – *контуром интегрирования*, A – начальной, а B – конечной точками интегрирования, dl – дифференциал дуги.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точках кривой AB, то криволинейный интеграл существует.

Свойство криволинейного интеграла 1-го рода: этот интеграл не зависит от выбора направления интегрирования на кривой AB, т.е.

$$\int\limits_{AB} f(x, y)dl = \int\limits_{BA} f(x, y)dl.$$

В остальном криволинейный интеграл 1-го рода обладает теми же свойствами, что и определённый интеграл.

Вычисление криволинейных интегралов. Вычисляется этот вид интегралов сведением к обычным определённым интегралам Римана. Рассмотрим возможные случаи.

новременно (т.е. кривая в каждой точке имеет касательную). Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кусков, называется *кусочно-гладкой*.

1. Если плоская гладкая кривая AB задана явно уравнением $y = y(x)$, где $x \in [a,b]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

2. Если плоская гладкая кривая AB задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t \in [t_0,t_1])$, где $x(t), y(t)$ – непрерывные функции, а $x'(t), y'(t)$ – кусочно-непрерывные функции, то справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

Некоторые из приложений криволинейных интегралов.

1. *Длина* L *дуги* AB плоской кривой вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_{AB} dl.$$

2. Если $\rho(x,y)$ – линейная плотность распределения массы для плоской кривой AB, то численное значение *массы* M кривой AB равно интегралу

$$M = \int\limits_{AB} \rho(x,y)dl.$$

3. Координаты *центра масс* (центра тяжести) дуги AB находятся по формулам

$$x_c = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} x\rho(x,y)dl, \quad y_c = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} y\rho(x,y)dl,$$

где M – масса дуги AB.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$$\int\limits_C (x-y)dl,$$

где C – отрезок прямой от точки $A(0,0)$ до точки $B(4,3)$.

Решение. Уравнение отрезка прямой AB имеет вид $y = \dfrac{3}{4}x$, где $0 \le x \le 4$ (кривая AB задана явно). Воспользуемся формулой:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

$$\int\limits_{C}(x-y)dl = \int_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \frac{5}{16}\int_0^4 xdx = \frac{5}{2}.$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл 1-го рода

$$\int\limits_{AB} y^2 dl,$$

где AB – часть окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $(a > 0)$.

Решение. В данном случае область интегрирования (дуга AB окружности) задана параметрически, найдём дифференциал дуги:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}dt = adt.$$

Тогда для вычисления интеграла воспользуемся формулой

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

Имеем:

$$\int\limits_{AB} y^2 dl = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin t)^2 dt = \frac{a^3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt = \frac{a^3}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{4}.$$

Выше мы определили понятие двойного интеграла от функции двух переменных. Их аналогом для функций трёх переменных являются так называемые *тройные интегралы* вида

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz.$$

Используя тройной интеграл, удобно вычислять объёмы трёхмерных тел, так как объём равен тройному интегралу по области интегрирования, в качестве которой и выступает данное трёхмерное тело. Для функций m переменных $(m > 3)$ имеются m-кратные интегралы.

Существуют также *криволинейные интегралы от функций трёх переменных 1-го и 2-го рода*, где в качестве области интегрирования выступает дуга пространственной кривой. Также имеются *поверхностные* *интегралы*, где областью интегрирования является участок поверхности в трёхмерном пространстве (можно интегрировать функцию трёх переменных, например, по сфере, эллипсоиду, кубу и прочим поверхностям).

Существуют и другие виды интегралов, обобщающих интеграл Римана, например, интегралы Лебега, в которых вместо разбиения области определения подынтегральной функции на части и составления потом интегральной суммы из значений функции на этих частях, на интервалы разбивают её область значений. Но эти виды интегралов изучают специалисты-математики.

7.2 Ряды

«Значение математики сейчас непрерывно возрастает. В математике рождаются новые идеи и методы. Всё это расширяет сферу её приложения. Сейчас уже нельзя назвать такой области деятельности людей, где математика не играла бы существенной роли. Она стала незаменимым орудием во всех наукахо природе, в технике, в обществоведении. Даже юристы и историки берут на своё вооружение математические методы».

А.Д. Александров.

7.2.1 Числовые ряды

Числовые и функциональные ряды широко применяются в приближённых вычислениях. Наиболее важными из этих применений являются: вычисление значений функций с помощью рядов и приближённое вычисление интегралов. Существуют также ряды в компле́ксной области. Вещественные числовые ряды изучаются в вещественном математическом анализе, компле́ксные числовые ряды, соответственно, – в компле́ксном анализе.

Понятие числового ряда. Частичная сумма ряда. Пусть дана числовая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, где $a_i \in \mathbb{R}$. *Числовым рядом* назовём бесконечную сумму вида

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i. \tag{1}$$

Здесь a_i называются *членами ряда*, член a_n с произвольным номером n – *общим членом ряда*. Конечная сумма первых n членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

называется *частичной суммой* ряда.

Ряд можно задать формулой общего члена, например, ряд с общим членом $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ ($n \in \mathbb{N}$) имеет вид

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + ...$$

Несколько сложнее может оказаться обратная задача: найти формулу общего члена ряда, если известны несколько его первых членов. Вообще говоря, эта задача имеет бесконечно много решений, но обычно достаточно найти какое-нибудь одно (желательно простое) решение. Например, пусть требуется найти общий член ряда

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{9} + \frac{6}{13} + ...$$

Подумав, можно предложить ответ: $a_n = \dfrac{2n}{4n+1}$.

Сходимость числового ряда. Важнейший вопрос исследования числовых рядов — это *сходимость* числовых рядов. Введём понятие сходящегося ряда. Рассмотрим для этого последовательность частичных сумм ряда: $S_1, S_2, ..., S_n, ...$.

Назовём ряд (1) *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм сходится к некоторому (конечному) числу S, называемому *суммой ряда*:[1]

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Символически пишут: $S = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$.

Если же последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ расходится (т.е. её предел равен бесконечности или не существует), то ряд называется *расходя́щимся*.

Пример 1. Доказать, используя определение сходящегося ряда, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ сходится.

Доказательство. Выпишем сумму n первых членов этого ряда (его частичную сумму):

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

[1] Напомним, что последовательность $\{S_n\}$ называется *сходящейся* к числу (пределу) S, если для любого положительного числа ε найдётся такой отвечающий ему номер $n_0(\varepsilon)$, что для всех номеров $n \geq n_0$ выполняется неравенство $|S_n - S| < \varepsilon$, т.е. все члены, начиная с номера n_0, оказываются в ε-окрестности числа S.

Представим каждую дробь как разность двух дробей $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$:

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Раскрыв скобки и сократив все промежуточные дроби, получим, что в результате останутся лишь первое и последнее слагаемые:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Выражение для частичной суммы упростилось, и теперь находим сумму ряда, переходя к пределу в этой последовательности:

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Поскольку сумма ряда оказалась равна конечному числу (единице), то ряд, по определению, сходится.

Пример 2. Выяснить, сходится или расходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$?

Решение. Выпишем частичную сумму ряда: $S_n = \underbrace{-1+1-1+1-...-1+1}_{n}$. По определению ряд сходится, если сходится эта числовая последовательность, и расходится в противном случае. Заметим, что при чётных n имеем $S_{2k} = 0 \to 0$ при $k \to +\infty$, а при нечётных $S_{2k+1} = -1 \to -1$. Получается, что последовательность S_n содержит две подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам. Но это означает, что S_n, а значит и ряд, расходится.

Пример 3. Исследовать сходимость геометрического ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$ в зависимости от значений параметра q.

Решение. Заметим, что члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию $1, q, q^2, q^3, ...$ с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем прогрессии, равным q. Из школьного курса элементарной математики известно, что сумма первых n членов этой прогрессии (т.е. n-ая частичная сумма ряда) при $q \neq 1$ вычисляется по формуле

$$S_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Возможны следующие случаи.

1) Если $|q| < 1$ (т.е. $-1 < q < 1$, такие геометрические прогрессии называют *бесконечно убывающими*), то, очевидно, $q^n \to 0$ и поэтому

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q},$$

т.е. ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

2) Если $|q| > 1$ (т.е. $q < -1$ или $q > 1$), то $q^n \to \infty$ и, следовательно, $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$, что значит, что ряд расходится.

3) Если $q = 1$, то ряд принимает вид $1 + 1 + 1 + 1 + ... = +\infty$. Поскольку сумма ряда бесконечна, то ряд по определению расходится.

4) Если $q = -1$, то ряд принимает вид $1-1+1-1+...$. Как было показано в предыдущем примере, сумма такого ряда не существует, что означает, что ряд также расходится.

Ответ: при $|q| < 1$ ряд сходится, а при $|q| \geq 1$ – расходится.

Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, где $p \in \mathbb{R}$, называется *обобщённым гармоническим рядом.* Он сходится при $p > 1$ и расходится в противном случае.

Назовём ряд, полученный из данного отбрасыванием его первых n членов, *n-ым остатком ряда* и обозначим $r_n = \sum\limits_{i=n+1}^{+\infty} a_i$. Тогда сумму ряда можно представить в виде $S = S_n + r_n$.

Свойства сходящихся рядов.

1. *Умножение ряда на число.* Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ сходится к сумме S, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \lambda a_i$, полученый умножением данного ряда на число λ, также сходится, причём его сумма равна λS.

2. *Сложение рядов.* Если ряды $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} b_i$ сходятся и их суммы соответственно равны S_1 и S_2, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}(a_i \pm b_i)$, представляющий сумму (разность) этих рядов, также сходится, причём к сумме, равной $S_1 \pm S_2$.

То есть сходящиеся ряды, как и конечные суммы, можно почленно складывать, вычитать и умножать на число.

3. Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ сходится, то сходится и ряд, полученный из него добавлением или отбрасыванием любого конечного числа n первых членов ряда. И наоборот, если к ряду добавили (или отбросили) конечное число первых членов, и полученный ряд сходится, то и исходный ряд сходится. Иными словами, на сходимость ряда не влияет добавление или отбрасывание любого конечного числа первых членов.

Теорема (*необходимое и достаточное условие сходимости ряда*). Для того чтобы ряд сходился, необходимо и достаточно, что при $n \to +\infty$ остаток ряда стремился к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

Необходимое условие сходимости ряда: если ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если условие $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ не выполняется, то ряд расходится.

Пример 4. Доказать, используя необходимое условие сходимости, что ряд расходится:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{n+1}.$$

Доказательство. Найдём $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{n+1} = 2 \neq 0$, значит, ряд расходится.

Покажем на примере, что данное условие не является достаточным для сходимости ряда.

Пример 5. Доказать, что для гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ выполняется необходимое условие сходимости, однако этот ряд расходится.

Решение. Убедимся в выполнении необходимого условия сходимости: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ – верно. Покажем, что, тем не менее, гармонический ряд расходится.

Действительно, если бы этот ряд сходился, то мы бы имели

$$\lim_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} - \lim_{n\to+\infty} S_n = S - S = 0.$$

В то же время,

$$S_{2n} - S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n}}_{n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

то есть $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$, но тогда равенство $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$ невозможно. Полученное противоречие означает, что предположение о сходимости ряда было неверным, а значит, ряд расходится.

Таким образом, если общий член ряда стремится к нулю, то это ещё не означает, что ряд сходится. Нужны дополнительные исследования и, в частности, при этом используют так называемые *признаки сходимости* числовых рядов. Остановимся на этом несколько подробнее.

Ряды с неотрицательными членами. Для таких рядов справедлива следующая

Теорема. *Для того чтобы ряд* $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ *с неотрицательными членами* a_i *сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.*

Например, выше мы показали, что частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ равна $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Поскольку последовательность $\{S_n\}$ ограничена, т.к. $\frac{1}{2} \leq S_n < 1$ при любом $n \in \mathbb{N}$, то по данной теореме это гарантирует сходимость числового ряда.

Рассмотрим достаточные условия (признаки) сходимости рядов, все члены которых неотрицательны.

1. *Признак сравнения.* Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} b_i$, и для всех натуральных n выполняется неравенство $a_n \leq b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} b_i$ (его в этой ситуации называют *мажорирующим*) следует сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ (его называют *мажорируемым*), а из расходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} b_i$.

Пример 6. Используя признак сравнения, доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$ сходится.

Решение. Сравним этот ряд со сходящимся геометрическим рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$ при $q = \frac{1}{2}$. Поскольку при всех натуральных n имеем оценку

$$\frac{1}{(n+1)^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

то из сходимости геометрического ряда следует сходимость исследуемого ряда.

Пример 7. Доказать расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. При всех $n \in \mathbb{N}$ получаем, что $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, а гармонический ряд расходится. Значит, и данный ряд расходится.

2. *Предельный признак сравнения.* Если $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} b_i$ – ряды с положительными членами, и существует конечный предел отношения их общих членов $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k \neq 0$, то эти ряды одновременно сходятся или расходятся.

Пример 8. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n^2+5}{n^3}$.

Решение. Сравним данный ряд, в котором $a_n = \dfrac{2n^2+5}{n^3}$, с гармоническим $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$. Составим отношение их общих членов и перейдём к пределу:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n^2+5)n}{n^3} = 2 \neq 0.$$

Получили, что эти ряды сходятся и расходятся одновременно. Но поскольку гармонический ряд расходится, то, значит, и данный ряд тоже расходится.

Рассмотрим теперь признаки сходимости рядов, позволяющие установить сходимость (расходимость) данного ряда, не сравнивая его с другим рядом, о котором известно, сходится он или расходится.

3. *Признак Даламбéра.*[1] Пусть дан ряд с положительными членами $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$ и существует предел (конечный или бесконечный)

$$D = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Тогда: 1) при $D < 1$ ряд сходится; 2) при $D > 1$ ряд расходится; 3) при $D = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться (признак не даёт ответа на этот вопрос, необходимо использование других признаков).

Пример 9. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 10. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^n}{n!}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{n^n (n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1.$$

[1] *Жан Д'Аламбер* (фр. Jean Le Rond D'Alembert, 1717–1783) — французский учёный-энциклопедист. Широко известен как философ, математик и механик. Член Парижской академии наук (1740), Французской Академии (1754), Петербургской (1764) и других академий.

Следовательно, ряд расходится.

4. *Признак Коши.*[1] Пусть дан ряд с положительными членами $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i$. Если существует предел (конечный или бесконечный)

$$C = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

то: 1) при $C < 1$ ряд сходится; 2) при $C > 1$ ряд расходится; 3) при $C = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться (вопрос остаётся открытым).

Пример 11. Зная, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \cdot 2^{-n}$.

Решение. Вычислим предел

$$C = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} < 1,$$

поэтому ряд сходится.

«Кто с детских лет занимается математикой, тот развивает внимание, тренирует свой мозг, свою волю, воспитывает на стойчивость и упорство в достижении цели».

А. Маркушевич (1908—1979) — советский математик и педагог. Автор работ по теории функций, педагогике и методике преподавания математики, истории науки. Автор многочисленных научно-популярных работ по математике.

Знакомеременные ряды. Если среди членов ряда присутствуют как положительные, так и отрицательные члены, то ряд называется *знакопеременным.* В частности, ряд называется *знакочередующимся*, если члены с чётными номерами имеют один знак (например, положительны), а остальные члены имеют противоположный знак (отрицательны). Любой знакочередующийся ряд можно представить в виде $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, где $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ – знакопостоянный ряд.

---

[1] *Огюстен Луи Коши* (фр. Augustin Louis Cauchy; 1789—1857) — французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий. Разработал фундамент математического анализа, внёс огромный вклад в анализ, алгебру, математическую физику и многие другие области математики; один из основоположников механики сплошных сред. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Признак Лейбница.[1] Если члены знакочередующегося ряда, будучи взяты по модулю, монотонно убывая стремятся к нулю, то этот ряд сходится.

Пример 12. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Решение. Воспользуемся признаком Лейбница. Он здесь приме́ним, так как, во-первых, ряд является знакочередующимся; во-вторых, $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$; в-третьих, это стремление к нулю монотонное. Поэтому, по признаку Лейбница, ряд сходится.

Теорема. Пусть дан знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Тогда если сходится ряд из модулей его членов $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, то сходится и сам исходный ряд.

Замечание. Если для знакопеременного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, то знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся.* Если же сам ряд сходится, а ряд из модулей расходится, то ряд называют *условно сходящимся.* В связи с этим существуют задачи на исследование сходящихся числовых рядов на абсолютную (условную) сходимость, однако это не предусмотрено нашей программой.

7.2.2 Функциональные последовательности и ряды

«Курс математики – изящен, красив и логичен, но его необходимо понимать. Если ребенок успевает по другим предметам, например, у него хорошо идет английский, он обязательно справится и с математикой, ведь английский устроен очень логично. Важно только доступно объяснять, не опускать рук, не ставить клеймо «чистый гуманитарий».

Леонид Костюков (род. 1959) – математик, прозаик, поэт, критик, литературный редакторе. Родился в актёрской семье. Окончил механико-математический факультет МГУ и Литературный институт. Преподавал в школе литературу и математику.

Функциональные последовательности – это обобщение понятия числовых последовательностей. Если каждому натуральному числу n

[1] *Готфрид Вильгельм Лейбниц* (нем. Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646—1716) — саксонский философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед. Основатель и первый президент Берлинской Академии наук, иностранный член Французской Академии наук.

ставится в соответствие по некоторому закону функция $f_n(x)$, определённая на множестве $X \subset \mathbb{R}$, то говорят, что на множестве X задана *функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}$. Множество X называется *областью определения* последовательности $\{f_n(x)\}$.

Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится в точке* x_0, если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится. Множество всех точек x_0, в которых $\{f_n(x)\}$ сходится, называется *областью сходимости* функциональной последовательности.

Пусть D – область сходимости $\{f_n(x)\}$. В любой точке $x \in D$ обозначим $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Эта функция $f(x)$ называется *предельной функцией* последовательности $\{f_n(x)\}$.

Функциональные ряды. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ — это ряд, каждым членом которого, в отличие от числового ряда, является не число, а функция $f_n(x)$. Приведём более строгое определение.

Пусть дана функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, определённая на множестве X. Бесконечная сумма вида

$$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

называется *функциональным рядом*. Множество X при этом называется *областью определения* ряда. Сумма n первых членов ряда $S_n = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} f_i(x)$ называется n-й *частичной суммой* функционального ряда.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *сходится в точке* x_0, если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ сходится. Множество D точек x_0, где ряд сходится, называется *областью сходимости* ряда.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *сходится на множестве* D, если последовательность S_n его частичных сумм сходится в любой точке множества D.

«Было бы хорошо, если бы математические знания требовало само государство и если бы лиц, занимающих высшие государственные должности, приучали заниматься математикой и в нужных случаях к ней обращаться».

Платон (428 до н. э. — 348 до н. э.) — древнегреческий философ, ученик Сократа, учитель Аристотеля.

Степенны́е ряды. Если членами функционального ряда являются степенны́е функции, то ряд называется *степенным*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots$$

Здесь числа c_n называются *коэффициентами* степенного ряда.

Совокупность тех значений x, при которых степенной ряд сходится, называется *областью сходимости* степенного ряда. Заметим, что любой степенной ряд сходится при $x = 0$. Существуют степенные ряды, которые сходятся только при $x = 0$. Примером такого ряда может служить ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n! x^n,$$

у которого при $x \neq 0$ нарушено необходимое условие сходимости.

Для каждого степенного ряда существует число $R \geq 0$, называемое *радиусом сходимости* степенного ряда, обладающее тем свойством, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ – расходится. В случае $|x| = R$ сходимость ряда исследуется отдельно. Если степенной ряд сходится на всём множестве действительных чисел, то радиус сходимости считается равным $+\infty$.

Пусть все коэффициенты $c_n \neq 0$ (по крайней мере, начиная с некоторого номера). Тогда радиус сходимости можно найти по формуле

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

В случаях, когда отдельные коэффициенты ряда могут обращаться в нуль, радиус сходимости можно определить с помощью, например, признаков Даламбера или Коши.

Пример 13. Найти радиус сходимость степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (3x)^{n^2}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Данный ряд будет сходиться (абсолютно), если $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{f_{n+1}}{f_n} \right| < 1$. Подставляя $f_n(x) = (3x)^{n^2}$, получим

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(3x)^{(n+1)^2}}{(3x)^{n^2}} \right| = \lim_{n\to+\infty} |3x|^{2n+1}.$$

Этот предел равен 0 при $|3x| < 1$ и он равен ∞ при $|3x| > 1$. Следовательно, ряд сходится при $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{3}$ и расходится при $|x| > \dfrac{1}{3}$.

Осталось выяснить сходимость ряда на концах интервала сходимости, т.е. при $x = \pm\dfrac{1}{3}$.
При $x = -\dfrac{1}{3}$ ряд принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n^2} = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ и, очевидно, расходится.
При $x = \dfrac{1}{3}$ имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 1^{n^2} = 1 + 1 + 1 + 1 + ...$, который тоже расходится.

В интервале сходимости любой степеннóй ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать, что даёт большúе возможности в решении прикладных задач.

Ряды Маклорена (Тейлора) – примеры разложения функций в степенные ряды. Степенные ряды широко применяются для аппроксимации функций, приближённого вычисления интегралов и решения дифференциальных уравнений.

8 ЛЕКЦИЯ: Векторная алгебра. Математическое моделирование в гуманитарных дисциплинах

«Подобно тому как все искусства тяготеют к музыке, все науки стремятся к математике».
Д. Сантаяна (1863–1952), американский философ и писатель испанского происхождения.

«Мы с наслаждением познаём математику... Она восхищает нас, как цветок лотоса».
Аристотель

Краткое содержание.

Раздел: Векторная алгебра.

I. Векторная алгебра. Скалярные и векторные величины. Понятие вектора. Длина вектора. Коллинеарные векторы. Линейные операции над векторами (умножение вектора на число, сложение и вычитание векторов) и их свойства. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов и его свойства. Скалярный квадрат вектора и его норма. Угол между векторами. Ортогональные векторы.

Понятие линейной комбинации векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Размерность и базис векторного пространства. Разложение по базису. Единственность разложения вектора по базису. Понятие векторного произведения и его свойства. [Смешанное произведение.]

II. Математические модели в общественных науках.

III. Подготовка к зачетной работе: разбор примерных вариантов заданий.

Литература:

I. [1]: Раздел 1 (Элементы матричного анализа). Гл. 3 (Элементы матричного анализа).

[2]: Гл. 9 (Аналитическая геометрия в пространстве), §2 (Понятие вектора), §3 (Линейные операции над векторами и их основные свойства), §5 (Разложение вектора по базису), §6 (Скалярное произведение векторов), §7 (Векторное произведение).

[3]: Гл. 4 (Векторная алгебра), §1 (Понятие вектора и линейные операции над векторами), §2 (Скалярное произведение двух векторов), §3 (Векторное и смешанное произведения векторов).

8.1 Векторная алгебра

Скалярные и векторные величины. Многие физические и не только физические величины полностью определяются заданием некоторого числа. Например, объём тела, его масса, температура, плотность, площадь, время, высота и др. Такие величины называют *скалярными*. Но есть и другие величины, которые определяются заданием не только числа, но и некоторого направления. Например, при движении тела имеют значение не только величина скорости, с которой движется тело, но и направление движения. Другой пример – сила (например, ветра) измеряется не только величиной, но и направлением воздействия. Такие величины, имеющие направление, назвали *векторными*. Для их описания в математике было введено понятие *вектора*.

8.1.1 Понятие вектора. Линейные операции над векторами.

Понятие вектора. Рассмотрим в пространстве две точки A и B и *направленный отрезок* AB (т.е. отрезок вместе с заданным на нём направлением). Точку A называют *началом*, а точку B – *концом* направленного отрезка. Направление всегда считается от начала к концу. Назовём направленный отрезок AB *вектором* и будем обозначать символом $\overrightarrow{AB}$. Другие обозначения вектора: $\vec{a}$, $\bar{a}$, $\boldsymbol{a}$.

Вектор, у которого начало и конец совпадают ($A = B$), называют *нулевым вектором* и обозначают $\vec{0}$. Длина отрезка AB называется *длиной*, или *модулем*, *вектора* и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если их длины и направления совпадают. *Ортом* вектора $\overrightarrow{AB}$ называется единичный (по длине) вектор с направлением $\overrightarrow{AB}$: $\vec{e} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, а его координаты – направляющими косинусами вектора $\overrightarrow{AB}$ (см. далее о координатах вектора).

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если при этом они имеют одинаковое направление, то называются *сонаправленными векторами* ($\vec{a} \upuparrows \vec{b}$), а если противоположное – то *противоположно направленными* векторами ($\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$). Нулевой вектор считается сонаправленным любому вектору, а длина его равна нулю.

Условие коллинеарности векторов. Для того чтобы вектор $\vec{a}$ был коллинеарен вектору $\vec{b}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $k \in \mathbb{R}$ такое, что $\vec{a} = k\vec{b}$.

Три ненулевых вектора называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди них имеется хотя бы один нулевой, то такие векторы также считаются компланарными.

Линейные операции над векторами. *Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число* λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, имеющий длину $|\lambda||\vec{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$. Вектор $(-\vec{a})$ называется *противоположным* вектору $\vec{a}$.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$ (сделайте рисунок). Это правило сложения двух векторов называют *правилом треугольника.* С другой стороны, вектор $\vec{c}$ в этом случае представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (*правило параллелограмма*). Обобщением этого правила на случай трёхмерного пространства служит *правило параллелепипеда.* Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не лежат в одной плоскости или на параллельных плоскостях. Совместим начала этих векторов в одной точке. Тогда вектор $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ является диагональю параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$, равный сумме вектора $\vec{a}$ и вектора, противоположного вектору $\vec{b}$. Если совместить начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в одной точке, то вектор разности $\vec{a} - \vec{b}$ имеет начало в конце вектора $\vec{b}$, а конец – в конце вектора $\vec{a}$ (сделайте рисунок). Итак, в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна диагональ представляет сумму векторов $\vec{a} + \vec{b}$, а другая – их разность $\vec{a} - \vec{b}$.

Линейные операции над векторами удовлетворяют следующим *свойствам.*

1. *Коммутативность* операции сложения: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. *Ассоциативность* операции сложения: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

3. *Ассоциативность относительно числового множителя*: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.

4. *Дистрибутивность операции сложения относительно умножения на число*: $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

5. Существует нулевой вектор $\vec{0}$ такой, что для любого вектора $\vec{a}$ верно $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (*особая роль нулевого вектора*).

6. Для любого вектора $\vec{a}$ существует *противоположный вектор* $(-\vec{a})$ такой, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Множество векторов, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющие приведённым выше свойствам, будем называть *векторным пространством*.

8.1.2 Координаты вектора

Пусть на плоскости или в пространстве задана система координат. Перенесём вектор $\vec{a}$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда *координатами* вектора $\vec{a}$ назовём координаты его конца. Тот факт, что вектор $\vec{a}$ на плоскости в системе координат Oxy имеет координаты x_1 и y_1, будем записывать так: $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$, или просто $\vec{a}\{x_1; y_1\}$. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, находятся по формуле

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}.$$

В трёхмерном пространстве координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, имеют вид

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ все его координаты умножаются на это число: $\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1\}$ (на плоскости), $\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}$ (в трёхмерном пространстве). При сложении (вычитании) двух векторов $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2\}$ соответствующие координаты векторов складываются (вычитаются):

$$\vec{a}+\vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}, \quad \vec{a}-\vec{b} = \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}.$$

Аналогично в трёхмерном пространстве.

Длина вектора $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$ на плоскости находится по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

а длина вектора $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ в пространстве – по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Если векторы $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Пример 1. Коллинеарны ли векторы $\vec{a}\{1; 0; 3\}$ и $\vec{b}\{-2; 0; -6\}$?

Решение. Да, так как $\vec{b} = -2 \cdot \vec{a}$. Иначе: координаты векторов пропорциональны

$$\frac{1}{-2} = \frac{0}{0} = \frac{3}{-6} \ - \text{ верно.}$$

Пример 2. Лежат ли на одной прямой точки $A(19, 13, 15)$, $B(4, 8, 5)$ и $C(10, 10, 9)$?

Решение. Точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны. Найдём их координаты: $\overrightarrow{AB} = \{-15; -5; -10\}$, $\overrightarrow{BC} = \{6; 2; 4\}$. Тогда $\frac{-15}{6} = \frac{-5}{2} = \frac{-10}{4}$ – верно. Значит, точки лежат на одной прямой.

Пример 3. Даны векторы $\vec{a} = \{2; -1; -2\}$ и $\vec{b} = \{8; -4; 0\}$. Найти векторы $2\vec{a}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{b} + \vec{a}$ и длину вектора $\vec{a}$.

Решение. Вектор $2\vec{a} = \{4; -2; -4\}$, разность $\vec{b} - \vec{a} = \{6; -3; 2\}$, сумма $\vec{b} + \vec{a} = \{10; -5; -2\}$, длина $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$.

8.1.3 Векторные функции

До этого мы изучали *скалярные* функции, значением которых в заданной точке служило действительное число. Введём понятие векторной функции. Пусть некоторая кривая в пространстве задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \text{ где } t \in T. \end{cases}$$

Каждому значению параметра t, принадлежащему области определения T функций $x(t), y(t), z(t)$, соответствует определённая точка $M(x, y, z)$. Но каждой точке M соответствует её радиус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой M. Проекции этого вектора на коородинатные оси совпадают с координатами точки M. Таким образом, каждому значению параметра t отвечает определённый вектор

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Этот вектор $\vec{r}$ мы будем называть *векторной функцией* скалярного аргумента t. Существуют векторные функции векторного аргумента и проч.

Например, если некоторый объект движется в пространстве, и его координаты $(x(t), y(t), z(t))$ зависят от времени t, то положение этого тела в пространстве описывается векторной функцией $\vec{r}$.

8.1.4 Скалярное произведение векторов. Понятие евклидова пространства.

Существуют несколько видов произведения векторов: скалярное, векторное, смешанное.

Скалярным произведением $(\vec{a}, \vec{b})$ (другие обозначения: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$) двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi, \quad \text{где } 0 \le \varphi \le \pi.$$

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то скалярное произведение по определению равно нулю.[1] При $\varphi = 0$ векторы сонаправлены, при $\varphi = \pi$ – противоположно направлены.

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известны длины этих векторов $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, а угол между ними равен $\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. По определению скалярного произведения получаем:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi = 2 \cdot 5 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 5\sqrt{3}.$$

[1] Понятие скалярного произведения родилось в механике. Если вектор $\vec{a}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{b}$, то работа, производимая указанной силой, будет равна скалярному произведению $(\vec{a}, \vec{b})$.

Скалярное произведение обладает следующими *свойствами.*

1. *Коммутативность*: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

2. *Дистрибутивность*: $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$.

3. *Вынос числового множителя за знак скалярного произведения*: $(\alpha\vec{a}, \vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$ для любого действительного α.

4. $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$, если $\vec{a}$ – ненулевой вектор, $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, если $\vec{a}$ – нулевой вектор.

Свойства 2 и 3 означают *линейность* скалярного произведения.

Векторное (линейное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее указанным свойствам, называется *евклидовым пространством.*

Если известны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то скалярное произведение этих векторов вычисляется по правилу

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2$$

(на плоскости для векторов $\vec{a} = \{x_1; y_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2\}$),

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

(в трёхмерном пространстве для векторов $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$). Обобщая, в n-мерном евклидовом пространстве скалярное произведение двух векторов $\vec{a} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $\vec{b} = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ находится как

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Скалярное произведение вектора $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ самого на себя, т.е. $(\vec{a}, \vec{a})$, называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и находится по правилу

$$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

(т.е. скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины).

Заметим, что если в n-мерном пространстве задано скалярное произведение, то *длину (норму) вектора* всегда можно задать как

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Длина вектора обладает следующими *свойствами.*

1. $|\vec{a}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} = \vec{0}$;

2. $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$;

3. $|(\vec{a}, \vec{b})| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ (неравенство Коши-Буняковского);

4. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (неравенство треугольника).

Из определения скалярного произведения получаем, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

В частности, в трёхмерном пространстве для векторов $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$ получаем

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

На плоскости аналогичная формула имеет более простой вид

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Заметим, что если косинус угла между векторами положителен, то это означает, что угол острый, если косинус отрицателен – угол тупой, а если косинус равен нулю, то угол прямой.

Пример 2. Даны векторы $\vec{a} = \{2; -1; -2\}$ и $\vec{b} = \{8; -4; 0\}$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Острый он или тупой?

Решение. Косинус угла равен

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 8 + (-1) \cdot (-4) + (-2) \cdot 0}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{20}{3\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{5}}{3} > 0.$$

Следовательно, угол между векторами острый и равен $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Два вектора называются *ортогональными* (перпендикулярными), если их скалярное произведение равно нулю. Очевидно, что нулевой вектор ортогонален любому другому вектору. Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения.

Пример 3. Упростить выражение: $(\vec{a} - 2\vec{b})(3\vec{a} + \vec{b})$, если известно, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны и $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$.

Решение. Раскроем скобки и учтём, что $\vec{a}\vec{b} = 0$:

$$(\vec{a} - 2\vec{b})(3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a}^2 - 6\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 = 3|\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 = -5.$$

8.1.5 Линейная зависимость и независимость системы векторов. Разложение по базису.

Понятие линейной комбинации векторов. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется вектор, равный сумме

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n,$$

где λ_i, $i = \overline{1, n}$, – некоторые действительные числа (коэффициенты).

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация этих векторов с указанными коэффициентами равна нулю:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}. \qquad (1)$$

В противном случае векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*. Для линейно независимых векторов равенство (1) выполняется лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно зависимы, то по крайней мере один из них линейно выражается через остальные. Верно и обратное утверждение: если один из векторов линейно выражается через остальные, то все эти векторы в совокупности линейно зависимы.

Любые два неколлинеарных вектора на плоскости можно рассматривать в качестве примера линейно независимых векторов. Но уже любые три вектора на плоскости являются линейно зависимыми (один из них является линейной комбинацией двух других).

Разме́рность и ба́зис векторного пространства. Разложение по базису. Понятие линейной независимости векторов лежит в основе определения размерности и базиса векторного пространства. А именно, *векторное пространство* называется *n-мерным*, если в нём существуют n линейно независимых векторов, а любые из $(n + 1)$ векторов уже являются зависимыми. Будем использовать для обозначения n-мерного векторного пространства символ $\mathbb{R}^n$.

Иными словами, *размерность* пространства – это максимальное число содержащихся в нём линейно независимых векторов. Число n называется *размерностью* пространства и обозначается $\dim \mathbb{R}^n$ (от слова *dimension* – размерность).

Совокупность любых n линейно независимых векторов n-мерного пространства называется *бáзисом* этого пространства. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (*о единственности разложения вектора по базису*). Каждый вектор $\vec{a}$ векторного пространства $\mathbb{R}^n$ можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ базиса, т.е.

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n, \tag{2}$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *координатами* вектора $\vec{a}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$, а само представление (2) – *разложением вектора* $\vec{a}$ по этому базису.

Говорят, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ образуют в n-мерном евклидовом пространстве *ортогональный базис*, если эти векторы попарно ортогональны, и *ортонормированный базис*, если эти векторы попарно ортогональны и норма (длина) каждого из них равна 1, т.е. если $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ при $i \neq j$ и $|\vec{e}_i| = 1$ при $i = \overline{1, n}$.

Теорема 2. Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Примером ортонормированного базиса в трёхмерном пространстве с прямоугольной системой координат $Oxyz$ является система трёх единичных векторов (ортов) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, где вектор $\vec{i} = \{1; 0; 0\}$ есть единичный вектор, направленный вдоль оси Ox, $\vec{j} = \{0; 1; 0\}$ – единичный вектор вдоль оси Oy, $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$ – единичный вектор вдоль оси Oz. Любой вектор $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ в трёхмерном пространстве можно единственным образом разложить по этому базису

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}.$$

Заметим, что координаты x_1, y_1, z_1 вектора $\vec{a}$ равны *проекциям* этого вектора на оси Ox, Oy и Oz соответственно.

Пример 1. Раскрыв скобки в выражении, вычислить его: $(2\vec{i}-\vec{j})\cdot\vec{j}+(\vec{j}-2\vec{k})\cdot\vec{k}+(\vec{i}-2\vec{k})^2$.

Решение: $-\vec{j}^2 - 2\vec{k}^2 + \vec{i}^2 + 4\vec{k}^2 = -1 - 2 + 1 + 4 = 2$, так как $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$.

Пример 2. Вдоль сторон OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Выразить через $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA}$, если длины $|OA| = 3$, $|OB| = 4$. Сделайте рисунок.

Решение. $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = 4\vec{j}$, $\overrightarrow{CB} = -3\vec{i}$, $\overrightarrow{BO} = -4\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Пример 3. В прямоугольнике $OACB$ (см. предыдущую задачу) точки M и N – середины сторон $BC = 3$ и $AC = 4$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ по векторам $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{ON} = \vec{b}$. Сделайте рисунок.

Решение. С одной стороны, $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. С другой стороны, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha(1,5\vec{i} + 4\vec{j}) + \beta(3\vec{i} + 2\vec{j}) = (1,5\alpha + 3\beta)\vec{i} + (4\alpha + 2\beta)\vec{j}$. В силу единственности разложения, приравняем коэффициенты при $\vec{i}$ и $\vec{j}$:

$$\begin{cases} 3 = 1,5\alpha + 3\beta, \\ 4 = 4\alpha + 2\beta, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3}, \\ \beta = \frac{2}{3}. \end{cases} \qquad \text{Ответ: } \vec{c} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Пример 4. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$.

Решение. По условию, $\vec{a} = \{2; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{0; -2; 1\}$. Одна диагональ равна $\vec{a} + \vec{b} = \{2; -1; 1\}$, другая диагональ равна $\vec{a} - \vec{b} = \{2, 3, -1\}$, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}||\vec{a} - \vec{b}|} = 0.$$

Пример 5. Показать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны, разложив вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Пусть $c = \alpha a + \beta b$, что приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} -3 = -\alpha + 2\beta, \\ 12 = 3\alpha - 3\beta, \\ 6 = 2\alpha - 4\beta, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 5, \\ \beta = 1. \end{cases}$$

Ответ: $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.

Понятие направляющих косинусов вектора. Пусть вектор $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$ в трёхмерном пространстве образует углы α, β, γ, соответственно, с координатными осями Ox, Oy, Oz. Тогда косинусы этих углов $\cos\alpha = \dfrac{x_1}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{y_1}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{z_1}{|\vec{a}|}$ называются *направляющими косинусами* этого вектора. Для направляющих косинусов справедливо равенство: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Пример. Ранее мы ввели понятие производной функции функции $z = f(x, y)$ в направлении произвольного (заданного) единичного вектора $\vec{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{e}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta.$$

Здесь $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{e}$, задающего направление дифференцирования.

8.1.6 Векторное произведение

Напомним, что три ненулевых вектора в трёхмерном евклидовом пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Тройка векторов называется *упорядоченной*, если указано, какой из них считается первым, какой вторым и какой – третьим.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой*, если после приведения их к общему началу из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется *левой*.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектора $\vec{a} \times \vec{b}$, который определяется тремя условиями:

1) длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ равна $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ образуют правую тройку векторов.

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, или же угол между ними равен нулю, то векторное произведение равно нулю.

Рассмотрим основные *свойства* векторного произведения.

1. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарные векторы; $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

2. Длина векторного произведения неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна площади S параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$S_{\text{парал.}} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|, \quad S_{\text{треуг.}} = \tfrac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|.$$

3. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (свойство антиперестановочности сомножителей).

4. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ (ассоциативность относительно скалярного множителя).

5. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (дистрибутивность относительно суммы векторов).

6. Если даны два вектора $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$, то их векторное произведение можно вычислить по формуле

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Пример. Найти векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$, если 1) $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}$; 2) $\vec{a}=\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}$.

Решение. 1) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$; 2) $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$.

В трёхмерном случае можно пойти дальше и определить векторное произведение матриц и произведение матрицы на вектор.

8.1.7 Смешанное произведение

Сме́шанным произведением трёх векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число, равное

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Обратимся к основным *свойствам* смешанного произведения.

1. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$, т.е. при перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак.

2. Если два из трёх данных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ параллельны или равны, то их смешанное произведение равно нулю.

3. Знаки операций «$\cdot$» и «$\times$» можно менять местами:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Поэтому смешанное произведение принято записывать в виде: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, т.е. без знаков действий и без скобок.

4. При круговой перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

5. Если $\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c}\{x_3, y_3, z_3\}$, то

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

6. Условие компланарности трёх векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$$

При этом между $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ существует линейная зависимость: $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

7. Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V_{\textit{параллел.}} = \pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

(«+» – при правой тройке, «−» – при левой тройке).

8. Объём пирамиды (тетраэдра), построенной на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$V_{\textit{пирам.}} = \pm\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

Пример 1. Показать, что точки $A(2, -1, -2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 0)$ и $D(5, 0, -6)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Это равносильно тому, что векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарны (и тогда один из них можно разложить по двум другим). Имеем: $\overrightarrow{AB} = \{-1; 3; 3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{0; 4; 2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{3; 1; -4\}$. Проверим выполнение условия компланарности:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{– верно.}$$

Пример 2. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках $O(0, 0, 0)$, $A(5, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$ и $C(1, 2, 4)$.

Решение. Имеем:

$$V_{\textit{пирам.}} = \pm\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm\frac{1}{6}\,\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OC}.$$

$$\text{Поскольку} \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 84, \text{ то } V_{\textit{пирам.}} = \frac{1}{6} \cdot 84 = 14 \text{ (куб.ед.)}$$

Отметим в заключение данного параграфа, что изложенный в нём материал относится к векторной алгебре, которая является частью *векторного исчисления*[1].

[1] *Векторное исчисление* – это раздел математики, в котором изучаются свойства операций над векторами.

8.2 Математическое моделирование в гуманитарных дисциплинах

Математическая модель – это упрощённый вариант действительности, используемый для изучения её ключевых свойств. Чарльз Лейв и Джеймс Марч (последний – почётный профессор Стэнфордского Университета) дают такое определение модели: «Модель – это упрощённая картина реального мира. Она обладает некоторыми, но не всеми свойствами реального мира. Она представляет собой множество взаимосвязанных предположений о мире. Как и любая картина, модель проще тех явлений, которые она по замыслу отображает или объясняет».

Для первичного знакомства с некоторыми известными математическими моделями в области гуманитарных дисциплин и существующими подходами к их разработке рекомендуем ознакомиться, например, с книгами из приведённого дополнительного списка литературы и другими современными изданиями по этой теме.

Математическому моделированию как перспективному направлению посвящено множество научных конференций, в том числе по социальным наукам, проводимых ежегодно в разных странах мира.[1]

[1] См., например, сайт Международной конференции по математическому моделированию в прикладных науках, ICMMAS'17: `http://icmmas.alpha-publishing.net/index.php?page=home`. Конференция ICMMAS'17 направлена на привлечение экспертов, исследователей и аспирантов, изучающих математическое и вычислительное моделирование в различных областях науки, техники и инженерии, а именно – теоретические и вычислительные аспекты в области математики, информатики, физики, химии, механики, биологии, экономики, политологии и других мировых наук.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели в данном курсе элементы основных разделов высшей математики (конечно, лишь некоторых из них), чтобы вы могли составить собственное впечатление об этой сложной, но увлекательной области знаний.

При желании некоторые из вас смогут продолжить свое образование в этом направлении и работать на стыке международной политологии и прикладной математики, что может привести к разработке совершенно новых и интересных математических моделей в мировой политике и, в конечном итоге, повысить эффективность и креативность вашей будущей работы.

«Многим серьёзным специалистам уже сейчас ясно, что дальнейшее развитие гуманитарных наук без математического моделирования и точных количественных методов исследования, широкого использования современных вычислительных средств просто невозможно» (*Е.В. Ши́кин, д.ф.-м.н., заслуженный профессор МГУ им. М.В. Ломоносова, Лауреат Премии Президента Российской федерации в области образования*).

Читайте интернет-интервью Евгения Викторовича Шикина «Естественность математической составляющей в гуманитарном образовании» на `https://www.nkj.ru/interview/18072`

В настоящее время создание новых, отвечающих современным реалиям математических моделей международных отношений остается чрезвычайно актуальным и требует разработки новых подходов, учитывающих как накопленный опыт предыдущих исследований[1], так и новейшие тенденции. Подходов, базирующихся на стремлении вступающих в жизнь поколений молодых ученых-политологов отразить современный взгляд на динамику международных отношений последних лет и создать новое знание в этой быстро меняющейся и сложной области.

Е.В. Хорошилова, к.ф.-м.н., доцент факультета Вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова.

2017 г.

[1]См., например, Мангейм Дж. Б., Рич Р.К. Политология: Методы исследования. – М.: Издательство "Весь Мир", 1997. – 544 с.